

Cahier de vacances de mathématiques

Passage Première → Terminale — Niveau renforcé, esprit Première C

30 exercices — Sans corrigé



Mode d'emploi

Ce cahier est destiné à consolider l'ensemble des notions essentielles de Première spécialité mathématiques avant l'entrée en Terminale, avec un niveau volontairement soutenu : calcul soigné, raisonnement, démonstration, modélisation et exercices de synthèse.

Chaque exercice est précédé d'un encadré **Indications de cours**. Ces indications rappellent uniquement les outils nécessaires : elles ne donnent ni la méthode complète ni le résultat.

Conseil de travail. Rédiger les calculs, justifier les changements de signe, annoncer les théorèmes utilisés et contrôler la cohérence des résultats. Une calculatrice peut être utilisée lorsqu'elle est utile, mais elle ne remplace pas la justification.

Répartition des 30 exercices

Partie	Notions travaillées	Exercices
I	Calcul algébrique, logique, second degré	1 à 3
II	Suites numériques	4 à 6
III	Fonctions et dérivation	7 à 10
IV	Fonction exponentielle	11 à 13
V	Trigonométrie	14 à 16
VI	Géométrie repérée et produit scalaire	17 à 20
VII	Probabilités conditionnelles et indépendance	21 à 23
VIII	Variables aléatoires	24 à 25
IX	Algorithmique et Python	26 à 27
X	Synthèses de niveau renforcé	28 à 30

Partie I — Calcul algébrique, logique et second degré

Exercice 1 — Calcul algébrique et raisonnement

Indications de cours

On utilisera notamment les identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

et

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Une expression fractionnaire n'est définie que lorsque son dénominateur est non nul. Pour démontrer qu'une proposition est fausse, un seul contre-exemple suffit. La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Énoncé

1. Développer, réduire puis ordonner

$$A(x) = (2x - 3)^2 - (x - 4)(x + 4).$$

2. Factoriser complètement

$$B(x) = 9x^2 - 24x + 16 - (3x - 4)(x + 2).$$

3. Simplifier, en précisant les valeurs interdites,

$$C(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6}.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\frac{2x + 1}{x - 2} = \frac{x + 7}{x + 1}.$$

5. Résoudre l'inéquation

$$\frac{x - 1}{x + 2} \geq 0.$$

6. Écrire la contraposée de la proposition : « Si n^2 est impair, alors n est impair. »
7. Démontrer cette proposition pour tout entier relatif n .
8. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 2 — Maîtriser le second degré

Indications de cours

Pour un trinôme

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

on définit le discriminant par

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

La forme canonique est

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

où

$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$

Le signe d'un trinôme dépend du signe de a et de ses éventuelles racines.

Énoncé

On considère

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 10.$$

1. Calculer Δ et déterminer les racines de f .
2. Écrire f sous forme factorisée.
3. Écrire f sous forme canonique.
4. Donner les coordonnées du sommet de la parabole représentative de f .
5. Dresser le tableau de signe de f .
6. Résoudre

$$f(x) \leq 0.$$

7. Résoudre

$$f(x) = 8.$$

8. Déterminer la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$ et la valeur de x pour laquelle elle est atteinte.



Exercice 3 — Second degré avec paramètre

Indications de cours

Lorsqu'une équation dépend d'un paramètre, il faut étudier le signe du discriminant en fonction de ce paramètre. Si deux racines x_1 et x_2 existent, alors

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Énoncé

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'équation

$$E_m: x^2 - (m + 2)x + 2m = 0.$$

1. Calculer le discriminant Δ_m .
2. Étudier, suivant m , le nombre de solutions réelles de E_m .
3. Vérifier que $x = 2$ est solution de E_m pour toute valeur de m .

4. En déduire l'autre solution éventuelle.
5. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les deux racines sont strictement positives.
6. Déterminer m pour que les deux racines soient égales.
7. Déterminer m pour que la somme des carrés des deux racines vaille 20.
8. Pour quelles valeurs de m le trinôme

$$x^2 - (m + 2)x + 2m$$

est-il positif ou nul pour tout réel x ?

Partie II — Suites numériques

Exercice 4 — Suite arithmétique et modélisation

Indications de cours

Une suite arithmétique de raison r vérifie

$$u_{n+1} = u_n + r$$

et, si elle commence à l'indice 0,

$$u_n = u_0 + nr.$$

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique peut se calculer par

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Énoncé

Une entreprise produit 12 000 pièces en 2026. Elle prévoit d'augmenter sa production annuelle de 750 pièces chaque année. On note u_n la production de l'année 2026 + n .

1. Donner u_0 , u_1 et u_2 .
2. Justifier que (u_n) est arithmétique et préciser sa raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n .
4. Calculer la production prévue en 2035.
5. Déterminer la première année où la production annuelle dépassera 20 000 pièces.
6. Calculer la production totale de 2026 à 2035 inclus.
7. L'entreprise dispose d'une capacité cumulée maximale de 170 000 pièces sur les dix premières années. Cette capacité suffit-elle ? Justifier.



Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

Exercice 5 — Suite géométrique et pourcentages

Indications de cours

Une suite géométrique de raison q vérifie

$$u_{n+1} = q u_n$$

et

$$u_n = u_0 q^n.$$

Une hausse de $t\%$ correspond à une multiplication par

$$1 + \frac{t}{100},$$

et une baisse de $t\%$ à une multiplication par

$$1 - \frac{t}{100}.$$

Énoncé

Un capital de 8 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 4,5%. On note C_n le capital disponible après n années.

1. Donner C_0 puis exprimer C_{n+1} en fonction de C_n .
2. Justifier que (C_n) est géométrique.
3. Exprimer C_n en fonction de n .

4. Calculer le capital au bout de 8 ans, arrondi au centime.
5. Déterminer le premier entier n pour lequel

$$C_n > 12\,000.$$
6. On considère un second placement rapportant exactement 360 € par an. Modéliser ce placement par une suite (D_n) .
7. Comparer les deux placements après 5, 10 puis 15 ans.
8. Expliquer pourquoi les deux modèles finissent par s'écarter fortement.

Exercice 6 — Suite affine et changement de variable

Indications de cours

Pour une suite définie par

$$u_{n+1} = au_n + b,$$

on peut chercher une valeur ℓ vérifiant

$$\ell = a\ell + b.$$

Le changement de variable

$$v_n = u_n - \ell$$

transforme alors souvent la suite en une suite géométrique.

Énoncé

On définit

$$u_0 = 2$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 3.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Conjecturer le sens de variation de (u_n) .
3. Déterminer le réel ℓ tel que

$$\ell = 0,8\ell + 3.$$

4. On pose

$$v_n = u_n - \ell.$$

Montrer que (v_n) est géométrique.

5. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
6. Étudier le comportement de u_n lorsque n devient grand.
7. Déterminer le premier entier n tel que



Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

$$u_n > 14.$$

8. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2 \leq u_n < 15.$$

Partie III — Fonctions et dérivation

Exercice 7 — Nombre dérivé et tangente

Indications de cours

Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Lorsque ce quotient possède une limite lorsque h tend vers 0, cette limite est le nombre dérivé $f'(a)$.

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Énoncé

On considère

$$f(x) = x^2 - 4x + 1.$$

1. Calculer $f(3)$.
2. Développer et simplifier

$$\frac{f(3 + h) - f(3)}{h}$$

pour $h \neq 0$.

3. En déduire $f'(3)$.

4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.
5. Déterminer l'abscisse du point où la tangente à la courbe est horizontale.
6. Vérifier le résultat précédent à partir de l'expression générale de $f'(x)$.
7. Déterminer les points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur 6.

Exercice 8 — Dériver et étudier une fonction polynôme

Indications de cours

On utilisera

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

ainsi que la linéarité de la dérivation. Sur un intervalle, si $f'(x) > 0$, alors f est croissante ; si $f'(x) < 0$, alors f est décroissante.

Énoncé

On considère la fonction

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Factoriser $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer les valeurs des extrema locaux.
6. Déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = 0$$

en utilisant le tableau de variations.

7. Donner un encadrement à l'unité de chacune des solutions.
8. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.



Exercice 9 — Fonction rationnelle et variations

Indications de cours

Pour une fonction quotient

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)},$$

avec $v(x) \neq 0$,

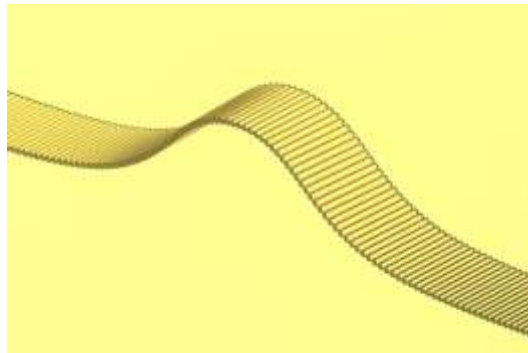




Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Le carré d'un réel non nul est strictement positif ; le signe d'une dérivée quotient est donc souvent déterminé par son numérateur.

Énoncé

On considère

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

définie pour tout réel $x \neq -1$.

1. Effectuer la division de $x^2 + 1$ par $x + 1$ et écrire f sous la forme

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x + 1}.$$

2. Calculer $f'(x)$.
3. Mettre $f'(x)$ sous une forme permettant d'en étudier facilement le signe.
4. Dresser le tableau de variations de f sur chacun des intervalles de son domaine.
5. Déterminer les coordonnées des extrema éventuels.
6. Résoudre

$$f(x) = 3.$$

7. Déterminer les abscisses des points où la tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation

$$y = \frac{1}{2}x + 4.$$

Exercice 10 — Optimisation

Indications de cours

Dans un problème d'optimisation, on cherche d'abord à exprimer la grandeur étudiée par une fonction d'une seule variable, puis on détermine son domaine et on étudie ses variations grâce à la dérivée.

Énoncé

Une boîte sans couvercle est fabriquée à partir d'une feuille carrée de côté 30 cm. On découpe dans chaque coin un carré de côté x cm, puis on replie les quatre bords.

1. Expliquer pourquoi

$$0 < x < 15.$$

2. Exprimer les dimensions de la boîte obtenue en fonction de x .
3. Montrer que son volume est

$$V(x) = x(30 - 2x)^2.$$

4. Développer $V(x)$.
5. Calculer $V'(x)$ et factoriser cette dérivée.
6. Dresser le tableau de variations de V pour $0 < x < 15$.
7. Déterminer la valeur de x donnant le volume maximal.
8. Calculer ce volume maximal.
9. Un fabricant souhaite un volume d'au moins $1\,800\text{ cm}^3$. Déterminer approximativement les valeurs de x compatibles avec cette contrainte.

Partie IV — Fonction exponentielle

Exercice 11 — Calculs avec l'exponentielle

Indications de cours

La fonction exponentielle vérifie

$$e^{a+b} = e^a e^b,$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a},$$

et

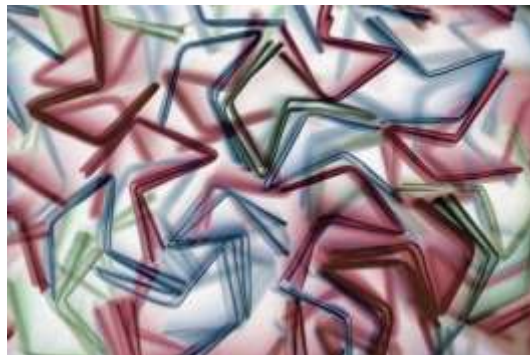
$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}.$$

De plus,

$$e^x > 0$$

pour tout réel x , et la fonction exponentielle est strictement croissante.

Énoncé





1. Simplifier

$$A = e^3 \times e^{-5} \times e^4.$$

2. Simplifier

$$B = \frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}}.$$

3. Résoudre

$$e^{2x-1} = e^5.$$

4. Résoudre

$$e^{3x+2} > e^{x-4}.$$

5. Montrer que, pour tout réel x ,

$$e^{2x} + 1 \geq 2e^x.$$

6. Résoudre

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

en posant

$$X = e^x.$$

7. Résoudre de même

$$e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0.$$

Exercice 12 — Étude d'une fonction exponentielle



Représentation graphique de la fonction étudiée

Indications de cours

On a

$$(e^x)' = e^x.$$

Pour u et v dérivables,

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

L'exponentielle étant toujours strictement positive, elle peut souvent être mise en facteur pour étudier le signe d'une dérivée.

Énoncé

On considère

$$f(x) = (x - 2)e^x.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Factoriser $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer la valeur de l'extremum de f .
6. Résoudre exactement

$$f(x) = 0.$$

7. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
8. Étudier le nombre de solutions de l'équation

$$(x - 2)e^x = -1.$$

Exercice 13 — Modèle de croissance et seuil**Indications de cours**

Une grandeur qui évolue continûment suivant une loi de la forme

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

est décrite par un modèle exponentiel. L'exponentielle étant croissante, comparer deux valeurs exponentielles revient à comparer leurs exposants lorsque les bases sont identiques.

Énoncé

La population d'une culture bactérienne est modélisée, pour $t \geq 0$, par

$$N(t) = 1\,500e^{0,18t},$$

où t est exprimé en heures.

1. Donner la population initiale.



Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

2. Calculer la population au bout de 5 heures.
3. Déterminer le facteur multiplicatif correspondant à une heure supplémentaire.
4. Comparer ce facteur à une hausse de 20% par heure.
5. Déterminer, par essais numériques ou à l'aide de la calculatrice, le premier entier n tel que $N(n) > 10\,000$.

6. Une seconde culture est modélisée par

$$M(t) = 2\,000e^{0,12t}.$$

Comparer les deux populations pour $t = 0$, $t = 5$ et $t = 10$.

7. Estimer le moment où les deux populations deviennent égales.
8. Expliquer pourquoi la première culture finit par dépasser durablement la seconde.

Partie V — Trigonométrie

Exercice 14 — Cercle trigonométrique et valeurs exactes

Indications de cours

Sur le cercle trigonométrique, le point associé à un réel x a pour coordonnées

$$(\cos x; \sin x).$$



On retiendra

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

ainsi que les symétries du cercle. Deux angles qui diffèrent d'un multiple de 2π ont le même point image.

Énoncé

1. Placer sur le cercle trigonométrique les angles

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{3}.$$

2. Donner, sans calculatrice, le cosinus et le sinus de chacun de ces angles.
3. Réduire modulo 2π les angles

$$\frac{17\pi}{6}, \quad -\frac{11\pi}{4}, \quad \frac{25\pi}{3}.$$

4. Déterminer les valeurs exactes de

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right), \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right).$$

5. Sachant que

$$\cos x = \frac{3}{5}$$

et que $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, déterminer $\sin x$.

6. Même question si

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right].$$

Exercice 15 — Équations trigonométriques

Indications de cours

Les équations de base sont

$$\cos x = \cos a$$

et

$$\sin x = \sin a.$$

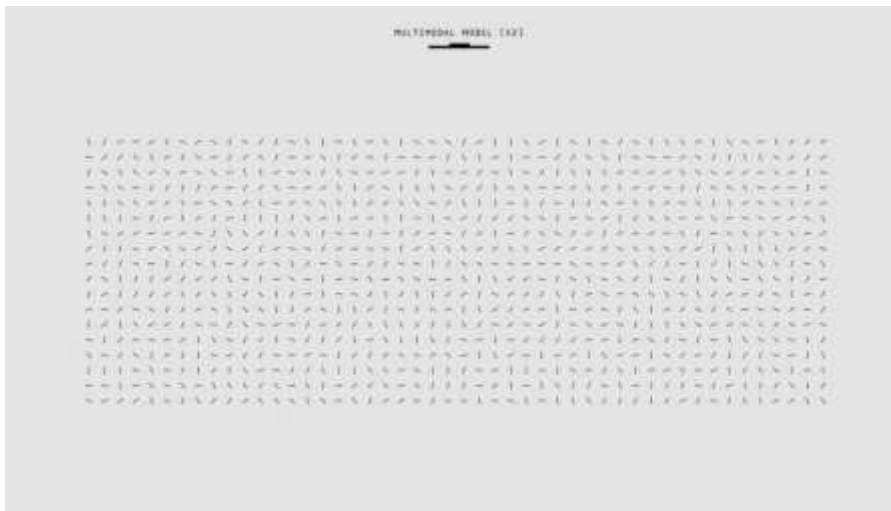
Sur un intervalle donné, on peut raisonner avec le cercle trigonométrique. Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π .

Énoncé

- Résoudre, pour $0 \leq x < 2\pi$, l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$.
- Résoudre, pour $0 \leq x < 2\pi$, l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Résoudre, pour $0 \leq x < 2\pi$, l'équation $2\cos x + \sqrt{3} = 0$.
- Résoudre, pour $0 \leq x < 2\pi$, l'équation $2\sin^2 x - 1 = 0$.
- Résoudre, pour $0 \leq x < 2\pi$, l'équation $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$.
- Résoudre, pour $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$.
- Déterminer tous les réels x tels que $\cos x = 1$.



Exercice 16 — Fonction trigonométrique et modélisation



Représentation graphique de la fonction étudiée

Indications de cours

Les fonctions sinus et cosinus permettent de modéliser des phénomènes périodiques. Une expression de la forme

$$f(t) = a + b\cos(\omega t)$$

oscille autour de la valeur moyenne a , avec une amplitude $|b|$.

Énoncé

La hauteur, en mètres, d'une cabine d'une grande roue est modélisée par

$$h(t) = 18 - 15\cos\left(\frac{\pi}{20}t\right),$$

où t est exprimé en secondes.

1. Calculer $h(0)$.
2. Déterminer la hauteur minimale et la hauteur maximale de la cabine.
3. Déterminer la période du mouvement.
4. Calculer $h(10)$, $h(20)$ et $h(30)$.
5. À quels instants de la première période la cabine est-elle à 18 m de hauteur ?
6. À quels instants de la première période atteint-elle sa hauteur maximale ?
7. Expliquer le rôle des nombres 18, 15 et $\frac{\pi}{20}$ dans le modèle.



Partie VI — Géométrie repérée et produit scalaire

Exercice 17 — Vecteurs et produit scalaire

Indications de cours

Dans un repère orthonormé, si

$$\vec{u} = (x; y), \quad \vec{v} = (x'; y'),$$

alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Énoncé

Dans un repère orthonormé, on considère

$$A(1; 2), \quad B(5; 4), \quad C(3; 8).$$

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Calculer

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

3. Le triangle ABC est-il rectangle en A ?
4. Calculer AB , AC et BC .
5. Déterminer la nature précise du triangle ABC .
6. Déterminer les coordonnées du milieu I de $[BC]$.
7. Calculer

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

8. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 18 — Droites et orthogonalité

Indications de cours

Une droite d'équation

$$ax + by + c = 0$$

admet pour vecteur normal

$$\vec{n} = (a; b).$$



Deux droites sont perpendiculaires lorsque leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux, ou lorsque leurs vecteurs normaux sont orthogonaux de manière adaptée.

Énoncé

On considère les points

$$A(-2; 1), \quad B(4; 3).$$

1. Déterminer un vecteur directeur de la droite (AB) .
2. Déterminer une équation cartésienne de (AB) .
3. Déterminer une équation de la droite d passant par A et perpendiculaire à (AB) .
4. Le point $C(1; -5)$ appartient-il à d ?
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d avec l'axe des abscisses.
6. Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$.
7. Vérifier que tout point de cette médiatrice est équidistant de A et de B .

Exercice 19 — Cercle dans un repère



Figure géométrique pédagogique illustrant la notion

Indications de cours

Le cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R a pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Une droite est tangente à un cercle si elle rencontre le cercle en un seul point ; au point de tangence, le rayon est perpendiculaire à la tangente.

Énoncé

On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0.$$

1. Mettre cette équation sous forme canonique.
2. En déduire le centre Ω et le rayon de $\mathcal{C}$.
3. Le point $A(6; 0)$ appartient-il au cercle ?

4. Déterminer une équation de la droite (ΩA) .
5. Si $A \in \mathcal{C}$, déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en A .
6. Étudier les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
7. Étudier les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite d'équation

$$y = x - 2.$$

Exercice 20 — Géométrie et paramètre



Figure géométrique pédagogique illustrant la notion

Indications de cours

Pour montrer qu'un triangle est rectangle, on peut utiliser le produit scalaire. Pour montrer qu'il est isocèle, on peut comparer des longueurs ou leurs carrés. Travailler avec les carrés des distances évite souvent les racines carrées.

Énoncé

Dans un repère orthonormé, on considère

$$A(0; 0), \quad B(6; 0), \quad M(t; 4),$$

où $t \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer AM^2 et BM^2 en fonction de t .
2. Déterminer t pour que le triangle ABM soit isocèle en M .
3. Déterminer t pour que le triangle ABM soit rectangle en M .
4. Déterminer t pour que le triangle ABM soit rectangle en A .
5. Existe-t-il une valeur de t pour laquelle le triangle est à la fois rectangle et isocèle ?
6. Déterminer l'aire du triangle ABM . Dépend-elle de t ?
7. Interpréter géométriquement le résultat précédent.

Partie VII — Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 21 — Arbre pondéré et probabilités conditionnelles

Indications de cours

Pour deux événements A et B avec $P(A) > 0$,

$$P_A(B) = P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$



Sur un arbre pondéré, on multiplie les probabilités le long d'une branche et on additionne les probabilités de branches incompatibles conduisant au même événement.

Énoncé

Dans une usine, 60% des pièces proviennent de la machine A et 40% de la machine B . La machine A produit 2% de pièces défectueuses, contre 5% pour la machine B .

On choisit une pièce au hasard.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que la pièce provienne de A et soit défectueuse.
3. Calculer la probabilité qu'elle soit défectueuse.
4. Calculer la probabilité qu'une pièce défectueuse provienne de B .
5. Une pièce est déclarée conforme. Calculer la probabilité qu'elle provienne de A .
6. Comparer les contributions des deux machines au nombre total de défauts.
7. L'entreprise envisage de réduire le taux de défauts de la machine B à 3%. Recalculer la probabilité globale de défaut.

Exercice 22 — Formule des probabilités totales et Bayes

Indications de cours

Si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers, alors

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i).$$

La formule de Bayes permet de « remonter » d'une conséquence vers une cause :

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Énoncé

Une maladie touche 1,5% d'une population. Un test est positif chez 96% des personnes malades. Il est également positif chez 4% des personnes non malades.

On choisit une personne au hasard.

1. Définir clairement les événements utiles.
2. Construire un arbre pondéré.
3. Calculer la probabilité que la personne soit malade et testée positive.
4. Calculer la probabilité d'obtenir un test positif.
5. Sachant que le test est positif, calculer la probabilité que la personne soit réellement malade.
6. Commenter le résultat obtenu à la question précédente.
7. Calculer la probabilité qu'une personne testée négative soit néanmoins malade.
8. Expliquer pourquoi la fréquence initiale de la maladie joue un rôle important dans l'interprétation du test.

Exercice 23 — Indépendance

Indications de cours

Deux événements A et B sont indépendants lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Si $P(A) > 0$, cela équivaut à

$$P(B | A) = P(B).$$

Énoncé

On lance deux fois un dé équilibré à six faces.

On note :

- A : « le premier lancer donne un nombre pair » ;
 - B : « la somme des deux résultats est au moins égale à 8 » ;
 - C : « les deux résultats sont identiques ».
1. Modéliser l'expérience par les 36 couples ordonnés possibles.

2. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.
3. Calculer $P(A \cap B)$.
4. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
5. Calculer $P(A \cap C)$.



Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

6. Les événements A et C sont-ils indépendants ?
7. Trouver un événement D , défini simplement à partir du second lancer, qui soit indépendant de A .
8. Justifier rigoureusement cette indépendance.

Partie VIII — Variables aléatoires

Exercice 24 — Loi d'une variable aléatoire

Indications de cours

Une variable aléatoire réelle X associe un nombre réel à chaque issue d'une expérience. Sa loi donne les valeurs possibles x_i et les probabilités correspondantes. Son espérance est

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i).$$

La variance est



$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2,$$

et l'écart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Énoncé

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré :

- si le résultat est 1, le joueur perd 6 € ;
- si le résultat est 2 ou 3, il perd 2 € ;
- si le résultat est 4 ou 5, il gagne 3 € ;
- si le résultat est 6, il gagne 8 €.

On note X le gain algébrique du joueur.

1. Donner les valeurs possibles de X .
2. Établir la loi de probabilité de X .
3. Calculer $E(X)$.
4. Le jeu est-il favorable au joueur ?
5. Calculer $E(X^2)$.
6. En déduire $V(X)$ puis $\sigma(X)$.
7. L'organisateur souhaite modifier uniquement le gain associé au résultat 6 pour rendre le jeu équitable. Déterminer ce nouveau gain.

Exercice 25 — Schéma de Bernoulli et variable de comptage

Indications de cours

Une expérience de Bernoulli comporte deux issues : succès et échec. Lorsqu'on répète indépendamment la même expérience n fois avec une probabilité de succès p , le nombre X de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p .

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Énoncé

Un archer touche sa cible avec une probabilité 0,7 à chaque tir. On suppose les tirs indépendants. Il effectue 5 tirs et X désigne le nombre de cibles atteintes.

1. Identifier la loi de X et ses paramètres.
2. Calculer $P(X = 5)$.
3. Calculer $P(X = 4)$.
4. Calculer $P(X \geq 4)$.
5. Calculer $P(X \leq 2)$.
6. Calculer l'espérance de X .
7. Interpréter cette espérance dans le contexte.
8. Déterminer la probabilité que l'archer atteigne au moins une fois la cible.

Partie IX — Algorithmique et Python

Exercice 26 — Boucle, seuil et suite



Indications de cours

Une boucle `while` répète des instructions tant qu'une condition est vraie. Elle est particulièrement adaptée à la recherche du premier rang pour lequel une suite franchit un seuil.

Pour la suite

$$u_{n+1} = 1,06u_n + 120,$$

chaque nouvelle valeur se calcule à partir de la précédente.

Énoncé

On considère la suite définie par

$$u_0 = 2\,000$$

et

$$u_{n+1} = 1,06u_n + 120.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Expliquer ce que fait l'algorithme suivant :

```
u = 2000
n = 0
while u < 5000:
    u = 1.06*u + 120
    n = n + 1
print(n, u)
```

3. Quelle information fournit la variable n à la fin de l'exécution ?
4. Modifier l'algorithme pour rechercher le premier rang où $u_n > 10\,000$.
5. Écrire une fonction Python `terme(n)` qui renvoie u_n .
6. Écrire une fonction `premier_seuil(S)` qui renvoie le premier entier n tel que $u_n \geq S$.
7. Expliquer pourquoi une boucle `for` est adaptée au calcul de u_{20} mais moins naturelle pour une recherche de seuil dont on ignore le rang à l'avance.

Exercice 27 — Simulation de probabilités

Indications de cours

Une simulation permet d'estimer une probabilité en répétant un grand nombre de fois une expérience aléatoire. La fréquence observée tend à se stabiliser autour de la probabilité théorique lorsque le nombre de répétitions augmente.

En Python, `random()` renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1.

Énoncé

Un joueur gagne une partie avec une probabilité 0,35.

1. Expliquer pourquoi le code suivant simule une partie :

```
from random import random
```

```
def partie():
    if random() < 0.35:
        return 1
    return 0
```

2. Compléter mentalement puis expliquer le programme suivant :

```
N = 10000
victoires = 0
for k in range(N):
    victoires = victoires + partie()
frequence = victoires / N
print(frequence)
```

3. Quelle valeur devrait-on obtenir approximativement pour *frequence* ?
4. Modifier le programme afin de simuler 20 parties et de compter le nombre de victoires.
5. Répéter virtuellement cette expérience 5 000 fois et estimer la probabilité d'obtenir au moins 10 victoires sur 20 parties.
6. Identifier la loi théorique de la variable « nombre de victoires en 20 parties ».
7. Expliquer la différence entre une valeur simulée et une valeur calculée exactement.

Partie X — Exercices de synthèse, niveau renforcé

Exercice 28 — Deux modèles de population

Indications de cours

Cet exercice mobilise suites arithmétiques, suites géométriques, comparaison de modèles et recherche de seuil. Une croissance additive produit une suite arithmétique ; une croissance proportionnelle produit une suite géométrique.

Énoncé

Au 1er janvier 2026, deux villes *A* et *B* comptent chacune 50 000 habitants.

- La ville *A* gagne 1 500 habitants par an.
- La ville *B* augmente sa population de 2,5% par an.

On note A_n et B_n les populations après n années.

1. Exprimer A_n en fonction de n .
2. Exprimer B_n en fonction de n .
3. Comparer les populations après 5 ans, puis après 10 ans.
4. Déterminer expérimentalement la première année où $B_n > A_n$.

5. Écrire un algorithme Python permettant de trouver automatiquement ce rang.

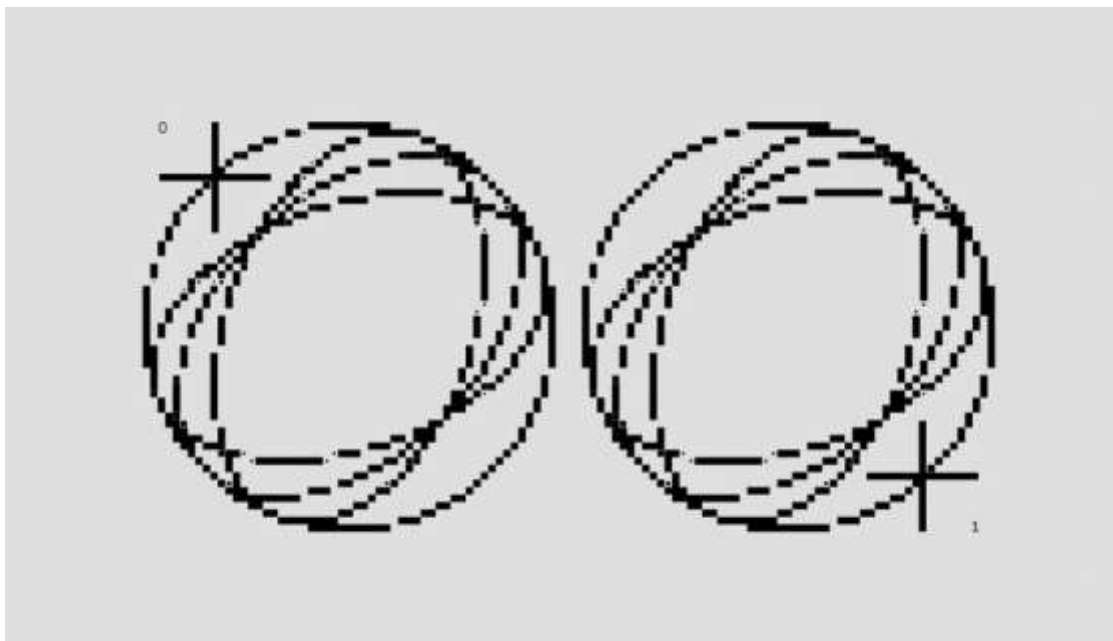


Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

6. Comparer les accroissements annuels

$$A_{n+1} - A_n$$

et

$$B_{n+1} - B_n.$$

7. Expliquer pourquoi le second modèle finit par dominer le premier.
 8. La ville A remplace son augmentation fixe par une croissance de 2% par an à partir de 2036. Proposer un nouveau modèle à partir de cette date.

Exercice 29 — Optimisation géométrique complète

Indications de cours

Cet exercice combine géométrie, fonction polynôme et dérivation. Il faut traduire la figure par une relation algébrique, déterminer les valeurs admissibles de la variable, puis étudier la fonction obtenue.

Énoncé

On dispose de 60 m de grillage pour construire un enclos rectangulaire adossé à un mur. Le côté situé le long du mur n'est pas grillagé. On souhaite en plus installer une séparation intérieure perpendiculaire au mur, sur toute la largeur de l'enclos.

On note x la largeur de l'enclos, en mètres.

1. Faire un schéma annoté.
2. Exprimer la longueur L de l'enclos en fonction de x .
3. Déterminer l'intervalle des valeurs possibles de x .
4. Montrer que l'aire est donnée par

$$A(x) = 20x - x^2.$$

5. Étudier les variations de A .
6. Déterminer les dimensions donnant l'aire maximale.
7. Calculer cette aire maximale.
8. Le propriétaire exige une aire d'au moins 96 m^2 . Résoudre cette contrainte.
9. Pour des raisons pratiques, la largeur doit être un nombre entier de mètres. Quelles largeurs entières satisfont la contrainte précédente ?
10. Parmi ces solutions entières, laquelle donne l'aire la plus grande ?

Exercice 30 — Défi Première C : étude complète d'un modèle

Indications de cours

Cet exercice de synthèse mobilise second degré, dérivation, exponentielle, probabilités et raisonnement. Il est conseillé de traiter chaque partie séparément avant de relier les résultats.

Énoncé

Une entreprise commercialise un produit. Lorsque le prix unitaire est x dizaines d'euros, avec

$$1 \leq x \leq 8,$$

la demande journalière est modélisée par

$$D(x) = 900 - 100x.$$

Le coût journalier de production, en dizaines d'euros, est

$$C(x) = 2x^2 + 30x + 200.$$

Le chiffre d'affaires, en dizaines d'euros, est défini par

$$R(x) = xD(x).$$

Le bénéfice est

$$B(x) = R(x) - C(x).$$

Partie A — Algèbre et optimisation

1. Exprimer $R(x)$ sous forme développée.
2. Montrer que

$$B(x) = -102x^2 + 870x - 200.$$
3. Calculer $B'(x)$.
4. Étudier les variations de B pour $1 \leq x \leq 8$.
5. Déterminer le prix donnant le bénéfice maximal selon le modèle.
6. Calculer ce bénéfice maximal.



Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

7. Résoudre

$$B(x) \geq 1\,000.$$

Interpréter le résultat.

Partie B — Évolution dans le temps

Après une campagne publicitaire, la demande au prix optimal évolue pendant n semaines selon

$$u_n = u_0 \times 1,03^n,$$

où u_0 est la demande initiale au prix optimal.

8. Déterminer u_0 à partir de la partie A.
9. Calculer la demande prévue après 10 semaines.
10. Déterminer le premier rang n pour lequel la demande a augmenté d'au moins 25%.
11. Écrire un court algorithme Python permettant de trouver ce rang.

Partie C — Contrôle qualité

Une unité produite présente un défaut avec une probabilité 0,02. On contrôle indépendamment 10 unités et on note X le nombre d'unités défectueuses.

12. Identifier la loi de X .
13. Calculer la probabilité qu'aucune unité ne soit défectueuse.
14. Calculer la probabilité qu'au moins une unité soit défectueuse.
15. Calculer l'espérance de X .
16. Sur 1 000 lots de 10 unités, combien de lots présentant au moins un défaut peut-on attendre approximativement ?



17. Rédiger en quelques lignes une conclusion reliant rentabilité, croissance de la demande et risque de défaut.

Fin du cahier

Avant d'entrer en Terminale

À l'issue de ces 30 exercices, l'élève doit être capable de :



- mener des calculs algébriques sans perdre la structure des expressions ;
- reconnaître et exploiter un trinôme du second degré ;
- modéliser une évolution par une suite ;
- dériver une fonction et exploiter le signe de sa dérivée ;
- manipuler la fonction exponentielle ;
- utiliser le cercle trigonométrique ;
- résoudre des problèmes de géométrie repérée à l'aide des vecteurs et du produit scalaire ;
- calculer des probabilités conditionnelles et reconnaître une situation d'indépendance ;
- déterminer et exploiter la loi d'une variable aléatoire ;
- écrire ou interpréter un algorithme Python simple ;
- combiner plusieurs chapitres dans un même raisonnement.

Aucun corrigé n'est fourni dans ce cahier. Les indications de cours sont volontairement limitées aux outils à connaître avant chaque exercice.