

CAHIER 6

Intégration, probabilités et grands problèmes de synthèse

Le pont final vers la L1 et la classe préparatoire

*Cahiers de vacances — passage en L1
Niveau très exigeant, esprit prépa et ancienne série C*



Image décorative en lien avec le thème général du cahier (mathématiques, étude), sans rapport avec un exercice précis

Objectif : autonomie, rigueur, culture mathématique et préparation aux raisonnements universitaires.

Présentation du cahier

Cette collection prépare un étudiant entrant en L1 scientifique, économique ou de gestion quantitative. Elle reprend les grands contenus de Première, Terminale spécialité et Mathématiques expertes, mais avec une exigence de démonstration, de calcul et d'autonomie inspirée de l'ancienne série C. Les exercices sont originaux et progressent de la consolidation vers des problèmes de niveau prépa.

Objectifs

- Maîtriser primitives, intégrales, équations différentielles et sommes de Riemann.
- Raisonner avec variables aléatoires, espérance, variance et conditionnement.
- Relier probabilités, matrices et modèles dynamiques.
- Résoudre des problèmes longs mêlant plusieurs chapitres.

Méthode de travail

1. Travailler sans calculatrice pendant la première tentative.
2. Rédiger les quantificateurs, les hypothèses et les conclusions.
3. Chercher au moins vingt minutes avant de lire une piste.
4. Reprendre l'exercice deux jours plus tard sans regarder la correction.
5. Tenir un carnet des erreurs : calcul, logique, méthode, rédaction.

Barème conseillé

Niveau	Temps indicatif	Attendu
Consolidation	10 à 20 min	Calcul exact et rédaction propre
Approfondissement	20 à 35 min	Choix de méthode et justification
Prépa	35 à 60 min	Démonstration structurée
Défi / très exigeant	60 à 90 min	Autonomie et synthèse

Conseil : masquer les corrigés pendant la première semaine de travail.

I. Intégration

Exercice 1. Primitives rationnelles [Consolidation]

Éléments du cours : Primitives ; division euclidienne ; décomposition en éléments simples ; complétion du carré.

Indication / méthode : Séparer une partie proportionnelle à la dérivée du dénominateur. Si le degré du numérateur est trop grand, commencer par une division ; pour les produits de facteurs simples, décomposer en éléments simples.

Formules / outils utiles : $\int u'/u \, dx = \ln|u| + C$; $\int dx/(x^2+a^2) = (1/a) \arctan(x/a) + C$.

Calculer :

a) $\int (3x+5)/(x^2+2x+5) \, dx$;

b) $\int dx/(x^2+4x+8)$;

c) $\int x^2/(x+1) \, dx$;

d) $\int dx/[x(x+1)]$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Compléter le carré et effectuer les divisions ou décompositions nécessaires.

Espace de travail :

Exercice 2. Intégration par parties [Approfondissement]

Éléments du cours : Intégration par parties ; choix de u et dv ; intégrales cycliques.

Indication / méthode : Choisir u pour qu'il se simplifie en dérivant et dv pour qu'il s'intègre facilement. Pour $e^x \cos x$, deux intégrations par parties ramènent à l'intégrale initiale.

Formules / outils utiles : $\int u \cdot v' \, dx = uv - \int u' \cdot v \, dx$.

Calculer sur $[0,1]$:

a) $\int x e^x \, dx$; b) $\int x^2 \ln(1+x) \, dx$; c) $\int e^x \cos x \, dx$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Pour c), intégrer deux fois et résoudre une équation sur l'intégrale.

Espace de travail :

Exercice 3. Sommes de Riemann [Prépa]

Éléments du cours : Sommes de Riemann ; changement d'échelle k/n ; intégrales sur $[0,1]$.

Indication / méthode : Réécrire chaque somme exactement sous la forme $(1/n) \sum f(k/n)$. Lorsque subsiste un facteur k , le transformer en $n(k/n)$.

Formules / outils utiles : $(1/n) \sum_{k=1}^n f(k/n) \rightarrow \int_0^1 f(x) \, dx$ pour f continue.

Calculer les limites :

a) $(1/n) \sum_{k=1}^n 1/(1+k/n)$;

b) $(1/n^2) \sum_{k=1}^n k e^{k/n}$;

c) $\sum_{k=1}^n n/(n^2+k^2)$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Reconnaître des sommes de la forme $(1/n) \sum f(k/n)$.

Espace de travail :

Exercice 4. Intégrale impropre [Défi]

Éléments du cours : Intégrales impropres ; convergence aux bornes infinies ou singulières ; intégrales de référence.

Indication / méthode : Toujours remplacer l'intégrale impropre par une limite d'intégrales sur des intervalles fermés. Étudier d'abord la convergence avant de calculer la valeur.

Formules / outils utiles : $\int_1^\infty x^{-p} \, dx$ converge $\Leftrightarrow p > 1$; $\int_0^\infty e^{-ax} \, dx = 1/a$ pour $a > 0$.

Étudier la convergence et calculer si possible :

a) $\int_1^\infty dx/x^p$ selon p ;

b) $\int_0^1 \ln x \, dx$;

c) $\int_0^\infty e^{-ax} dx$ selon a ;

d) $\int_0^\infty x e^{-x} dx$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Travailler d'abord sur un intervalle fermé puis passer à la limite.

Espace de travail :

II. Équations différentielles

Exercice 5. Premier ordre linéaire [Consolidation]

Éléments du cours : Équation différentielle linéaire du premier ordre ; solution homogène ; solution particulière ; condition initiale.

Indication / méthode : Chercher une solution particulière constante, ajouter la solution de l'équation homogène, puis utiliser $y(0)=1$. Séparer ensuite régime permanent et terme transitoire.

Formules / outils utiles : $y' + ay = b \Rightarrow y = b/a + Ce^{-at}$ ($a \neq 0$).

Résoudre $y' + 2y = 6$ avec $y(0)=1$. Étudier la limite et interpréter le rôle du régime transitoire.

Piste (à lire seulement après recherche) : Solution particulière constante puis équation homogène.

Espace de travail :

Exercice 6. Équation logistique [Approfondissement]



Éléments du cours : Équation différentielle à variables séparables ; fractions partielles ; croissance logistique ; limite.

Indication / méthode : Séparer y et t , décomposer $1/[y(1-y)]$, intégrer puis déterminer la constante avec y_0 . Pour le temps à 90 %, résoudre ensuite une équation exponentielle.

Formules / outils utiles : $1/[y(1-y)] = 1/y + 1/(1-y)$; $\int dy/[y(1-y)] = \ln(y/(1-y)) + C$.

Résoudre $y' = y(1-y)$, $y(0) = y_0 \in]0, 1[$.

- 1) Séparer les variables.
- 2) Donner $y(t)$.
- 3) Étudier la limite.
- 4) Déterminer le temps pour atteindre 90 % du niveau limite.

Piste (à lire seulement après recherche) : Décomposer $1/[y(1-y)]$.

Espace de travail :

Exercice 7. Oscillateur harmonique [Prépa]

Éléments du cours : Équation différentielle linéaire du second ordre ; fonctions sinus/cosinus ; énergie conservée.

Indication / méthode : Écrire la solution générale avec $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$, puis déterminer les constantes. Pour l'énergie, dériver E ou multiplier l'équation par $2y'$.

Formules / outils utiles : $y'' + \omega^2 y = 0 \Rightarrow y = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$; $E = y'^2 + \omega^2 y^2$.

Résoudre $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

- 1) Donner la solution.
- 2) Montrer que $E(t) = y'(t)^2 + \omega^2 y(t)^2$ est constante.
- 3) Interpréter géométriquement la trajectoire dans le plan $(y, y'/\omega)$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Multiplier l'équation par $2y'$.

Espace de travail :

Exercice 8. Équation non linéaire par changement de variable [Défi]

Éléments du cours : Équation différentielle non linéaire ; changement de variable logarithmique ; solutions constantes.

Indication / méthode : Sur $y > 0$, poser $z = \ln y$: le quotient y'/y apparaît immédiatement. Résoudre l'équation sur z puis revenir à y , sans oublier les solutions constantes éventuelles.

Formules / outils utiles : $z = \ln y \Rightarrow z' = y'/y$; si $z' = z$ alors $z(t) = Ce^t$.

Résoudre sur un intervalle où $y > 0$: $y' = y \ln y$.

- 1) Poser $z = \ln y$.
- 2) Résoudre l'équation obtenue.
- 3) Discuter les solutions constantes et le comportement selon $y(0)$.

Piste (à lire seulement après recherche) : $z' = y'/y$.

Espace de travail :



III. Probabilités

Exercice 9. Conditionnement et Bayes [Consolidation]

Éléments du cours : Probabilités conditionnelles ; arbre pondéré ; formule des probabilités totales ; formule de Bayes.

Indication / méthode : Séparer « malade » et « non malade », traduire sensibilité et spécificité en probabilités conditionnelles puis calculer d'abord $P(\text{test} +)$.

Formules / outils utiles : $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$; $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$.

Une maladie touche 1 % d'une population. Un test a une sensibilité de 98 % et une spécificité de 95 %.

- 1) Calculer la probabilité d'un test positif.
- 2) Calculer la probabilité d'être malade sachant le test positif.
- 3) Expliquer l'effet du faible taux de base.

Piste (à lire seulement après recherche) : Construire un arbre pondéré.

Espace de travail :

Exercice 10. Loi binomiale [Approfondissement]

Éléments du cours : Variables de Bernoulli ; somme d'indicateurs ; loi binomiale ; espérance ; variance ; approximation exponentielle.

Indication / méthode : Écrire X comme somme de n variables indicatrices indépendantes. L'espérance se somme toujours ; la variance se somme grâce à l'indépendance.

Formules / outils utiles : $X \sim B(n, p)$: $E(X) = np$; $\text{Var}(X) = np(1-p)$; $P(X=0) = (1-p)^n \approx e^{-np}$ si p petit.

X suit $B(n, p)$.

- 1) Démontrer $E(X) = np$ en écrivant X comme somme d'indicateurs.
- 2) Démontrer $\text{Var}(X) = np(1-p)$.
- 3) Pour $n=100, p=0,03$, calculer $P(X=0)$, $P(X \leq 1)$ et donner une approximation exponentielle de $P(X=0)$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Utiliser l'indépendance des indicateurs.

Espace de travail :

Exercice 11. Espérance et stratégie [Prépa]

Éléments du cours : Variable aléatoire discrète ; espérance ; variance ; somme de variables indépendantes ; notion de jeu équitable.

Indication / méthode : Établir d'abord la loi du gain. Pour 100 parties, ne pas recalculer toute la loi : utiliser linéarité de l'espérance et additivité des variances indépendantes.

Formules / outils utiles : $E(X) = \sum x_i p_i$; $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$; $\text{Var}(\sum X_i) = \sum \text{Var}(X_i)$ si indépendance.

Un jeu rapporte 10 € avec probabilité 0,1, 2 € avec probabilité 0,4 et fait perdre 3 € sinon.

- 1) Calculer espérance et variance du gain.
- 2) Quel prix maximal payer pour un jeu équitable ?
- 3) Pour 100 parties indépendantes, calculer espérance et écart-type du gain total.
- 4) Discuter la différence entre espérance positive et risque faible.

Piste (à lire seulement après recherche) : Le gain prend les valeurs 10, 2, -3.

Espace de travail :

Exercice 12. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev [Défi]

Éléments du cours : Inégalité de Markov ; variance ; indicatrice ; concentration ; loi faible des grands nombres.

Indication / méthode : Sur l'événement $|X-m| \geq a$, on a $(X-m)^2 \geq a^2$. Comparer donc l'espérance de $(X-m)^2$ à a^2 fois la probabilité de cet événement.

Formules / outils utiles : $P(|X-E(X)| \geq a) \leq \text{Var}(X)/a^2$; $\text{Var}((X_1 + \dots + X_n)/n) = \sigma^2/n$ si les X_i sont indépendantes de variance σ^2 .

- 1) Démontrer pour une variable X de variance finie : $P(|X-E(X)| \geq a) \leq \text{Var}(X)/a^2$.
- 2) Appliquer à la moyenne de n variables indépendantes de même variance σ^2 .
- 3) En déduire une forme faible de la loi des grands nombres.

Piste (à lire seulement après recherche) : Utiliser l'indicatrice de l'événement et l'inégalité $(X-m)^2 \geq a^2$ sur cet événement.

Espace de travail :

IV. Modèles et synthèses courtes



Schema de probabilités ou arbre pondéré

Exercice 13. Marche aléatoire [Consolidation]

Éléments du cours : Marche aléatoire symétrique ; loi binomiale ; espérance ; variance ; coefficient binomial central.

Indication / méthode : Compter le nombre de pas +1 parmi n : si X_n le désigne, alors S_n s'exprime simplement en fonction de X_n . Pour le retour en 0, imposer autant de +1 que de -1.

Formules / outils utiles : $S_n = 2X_n - n$ avec $X_n \sim B(n, 1/2)$; $P(S_{2n} = 0) = C(2n, n) / 2^{2n}$.

Une particule part de 0 et avance de +1 ou -1 avec probabilité 1/2 à chaque étape.

- 1) Déterminer la loi de S_n .
- 2) Calculer $E(S_n)$ et $\text{Var}(S_n)$.
- 3) Calculer $P(S_{2n} = 0)$.
- 4) Donner un équivalent de cette probabilité en admettant la formule de Stirling.

Piste (à lire seulement après recherche) : $S_n = 2X_n - n$ avec X_n binomiale.

Espace de travail :

Exercice 14. Problème de ruine simple [Approfondissement]

Éléments du cours : Chaîne de Markov ; probabilité d'atteinte ; relation de récurrence ; conditions aux bords.

Indication / méthode : Conditionner sur le premier coup joué. La relation obtenue est une récurrence linéaire d'ordre 2 dont la différence seconde est nulle.

Formules / outils utiles : $p_i = (p_{i-1} + p_{i+1})/2$; $p_0 = 0$, $p_N = 1$.

Un joueur possède i euros, $0 < i < N$. À chaque partie il gagne ou perd 1 euro avec probabilité 1/2. Le jeu s'arrête à 0 ou N . Soit p_i la probabilité d'atteindre N avant 0.

- 1) Établir $p_i = (p_{i-1} + p_{i+1})/2$.
- 2) Résoudre la récurrence avec $p_0 = 0$, $p_N = 1$.
- 3) Interpréter le résultat.

Piste (à lire seulement après recherche) : La seconde différence est nulle.

Espace de travail :

Exercice 15. Algorithme d'Euclide et complexité [Prépa]**Éléments du cours :** Algorithme d'Euclide ; nombres de Fibonacci ; nombre d'étapes ; croissance exponentielle.**Indication / méthode :** Effectuer l'algorithme sur F_{n+1} et F_n : les restes reproduisent les termes précédents de Fibonacci. Relier ensuite n à la taille des nombres par la formule asymptotique de F_n .**Formules / outils utiles :** $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$; $F_n \sim \varphi^n / \sqrt{5}$ avec $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

- 1) Exécuter l'algorithme d'Euclide sur deux nombres de Fibonacci consécutifs.
- 2) Montrer qu'il effectue un grand nombre d'étapes.
- 3) Expliquer pourquoi les couples de Fibonacci constituent des cas défavorables.
- 4) Relier le nombre d'étapes à la croissance exponentielle de F_n .

Piste (à lire seulement après recherche) : *À chaque division, le quotient vaut 1 et le reste est le terme précédent.*

Espace de travail :

Exercice 16. Méthode probabiliste [Défi]**Éléments du cours :** Comptage de sous-ensembles ; indépendance ; espérance ; récurrence de Fibonacci ; probabilités combinatoires.**Indication / méthode :** Pour compter les parties sans deux entiers consécutifs, séparer celles qui contiennent n de celles qui ne le contiennent pas. Cette dichotomie fait apparaître une récurrence à deux termes.**Formules / outils utiles :** Si a_n compte les parties sans consécutifs, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; chaque partie de $\{1, \dots, n\}$ a probabilité 2^{-n} .On choisit au hasard une partie A de $\{1, \dots, n\}$, chaque élément étant inclus indépendamment avec probabilité $1/2$.

- 1) Calculer $E(|A|)$.
- 2) Calculer la probabilité que A ne contienne aucun couple d'entiers consécutifs pour n petit.
- 3) Montrer que le nombre de parties sans entiers consécutifs vérifie une récurrence de Fibonacci.
- 4) En déduire la probabilité générale.

Piste (à lire seulement après recherche) : *Séparer les parties selon qu'elles contiennent n ou non.*

Espace de travail :

Problèmes de synthèse

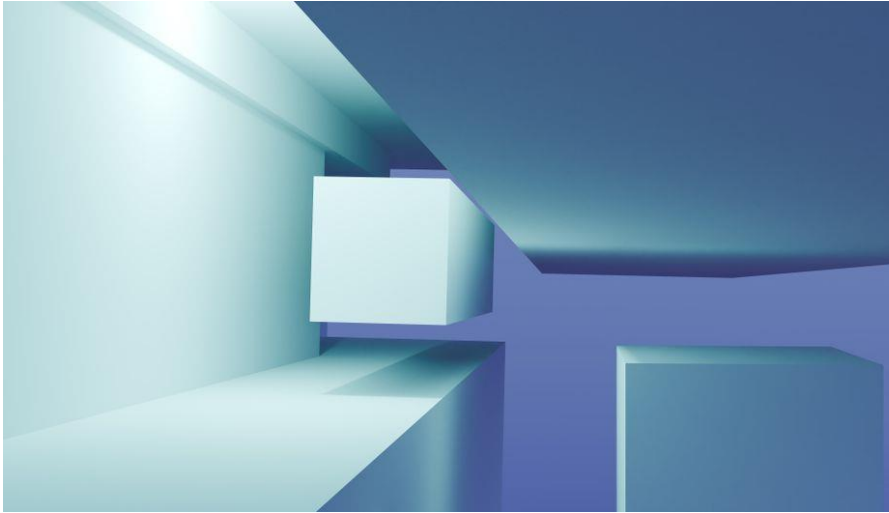


Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

Problème A — Intégrale de Wallis

Éléments du cours : Intégration par parties ; récurrence ; suites encadrées ; équivalents ; intégrales trigonométriques.

Indication / méthode : Utiliser une intégration par parties qui fait baisser l'exposant de 2. Ensuite comparer $\sin^{n+2}$, $\sin^{n+1}$ et $\sin^n$ sur $[0, \pi/2]$ pour obtenir les encadrements.

Formules / outils utiles : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$; $I_n = (n-1)I_{n-2}/n$ pour $n \geq 2$.

Niveau : Prépa renforcée

Pour $n \geq 0$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$.

- 1) Calculer I_0 et I_1 .
- 2) Par intégration par parties, montrer $I_n = (n-1)I_{n-2}/n$ pour $n \geq 2$.
- 3) En déduire des formules pour I_{2n} et I_{2n+1} .
- 4) Montrer $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$.
- 5) En exploitant $I_{n+2} = (n+1)I_n/(n+2)$, montrer $I_{n+1}/I_n \rightarrow 1$.
- 6) En déduire un équivalent de I_n .

Piste globale : Pour la dernière question, utiliser les produits de Wallis ou admettre Stirling.

.....

Problème B — File d’attente simplifiée



Éléments du cours : Chaîne de Markov finie ; matrice de transition ; distribution stationnaire ; capacité et probabilité de refus.

Indication / méthode : Fixer explicitement l’ordre arrivée/service avant de remplir la matrice. Résoudre ensuite $\pi P = \pi$ avec normalisation, puis identifier les transitions correspondant à un refus.

Formules / outils utiles : $\pi P = \pi$; $\sum \pi_i = 1$; probabilité stationnaire d’un événement = somme des probabilités stationnaires des états $\times$ probabilité conditionnelle de l’événement.

Niveau : Très exigeant

À chaque minute, un client arrive avec probabilité p et le serveur termine un service avec probabilité q , indépendamment, mais la file ne peut pas devenir négative. On se limite aux états 0,1,2. À l’état 2, toute nouvelle arrivée est refusée.

- 1) Construire la matrice de transition en précisant l’ordre arrivée/service choisi.
- 2) Déterminer une distribution stationnaire pour $p, q \in]0, 1[$.
- 3) Calculer la probabilité stationnaire de refus.
- 4) Étudier l’effet de p et q .
- 5) Proposer une généralisation à une capacité N .

Piste globale : Fixer clairement la convention : service puis arrivée, ou arrivée puis service. Toute réponse cohérente est acceptable.

.....

.....

.....

Problème C — Grand problème de passage en L1

Éléments du cours : Continuité et limite en 0 ; dérivation ; inégalités logarithmiques ; asymptotiques ; sommes de Riemann.

Indication / méthode : Traiter le problème comme une synthèse : obtenir d'abord les propriétés de f , puis réutiliser les encadrements de $\ln(1+x)$ pour la suite. Enfin reconnaître A_n comme somme de Riemann.

Formules / outils utiles : $\ln(1+x)/x \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$; $x/(1+x) \leq \ln(1+x) \leq x$; $(1/n) \sum f(k/n) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$.

Niveau : Concours blanc

On définit $f(x) = \ln(1+x)/x$ pour $x > 0$ et $f(0) = 1$.

- 1) Montrer que f est continue en 0.
- 2) Étudier les variations de f sur $[0, +\infty)$.
- 3) Montrer $1/(1+x) \leq f(x) \leq 1$.
- 4) Pour $n \geq 1$, étudier $u_n = n[(1+1/n)^n - e]$.
- 5) Calculer $\lim u_n$.
- 6) On pose $A_n = \sum_{k=1}^n f(k/n)/n$. Interpréter A_n et déterminer sa limite.
- 7) Donner une estimation de l'erreur par monotonie.

Piste globale : Pour 2), étudier $x/(1+x) - \ln(1+x)$. Pour 4), développer le logarithme.

.....

.....

.....

Corrigés et éléments de solution

Les corrigés privilégient les idées, les étapes décisives et les contrôles. Une rédaction personnelle complète reste indispensable.

Exercice 1. Primitives rationnelles

- a) Écrire $3x+5=(3/2)(2x+2)+2 : (3/2)\ln(x^2+2x+5)+2 \arctan((x+1)/2)+C$.
- b) $1/2 \arctan((x+2)/2)+C$.
- c) $x^2/(x+1)=x-1+1/(x+1)$, primitive $x^2/2-x+\ln|x+1|$.
- d) $\ln|x|-\ln|x+1|+C$.

Exercice 2. Intégration par parties

- a) $[e^x(x-1)]_0^1=1$.
- b) Par parties $u=\ln(1+x)$, $dv=x^2 dx : (1/3)\ln 2-(1/3)\int_0^1 x^3/(1+x) dx$. Or $x^3/(1+x)=x^2-x+1-1/(1+x)$. Résultat $(2/3)\ln 2-5/18$.
- c) Une primitive est $e^x(\sin x+\cos x)/2$; intégrale $= [e^x(\sin x+\cos x)/2]_0^1$.

Exercice 3. Sommes de Riemann

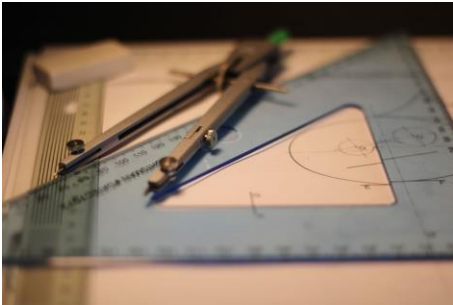
- a) $\int_0^1 dx/(1+x)=\ln 2$.
- b) $(1/n)\sum (k/n)e^{k/n} \rightarrow \int_0^1 x e^x dx=1$.
- c) $(1/n)\sum 1/[1+(k/n)^2] \rightarrow \int_0^1 dx/(1+x^2)=\pi/4$.

Exercice 4. Intégrale impropre

- a) Converge si $p>1$, valeur $1/(p-1)$.
- b) Valeur -1 .
- c) Converge si $a>0$, valeur $1/a$.
- d) Par parties, valeur 1 .

Exercice 5. Premier ordre linéaire

$y=3+Ce^{-2x}$, $y(0)=1$ donne $C=-2$. Donc $y=3-2e^{-2x}$, limite 3. Le terme exponentiel est le régime transitoire.



Exercice 6. Équation logistique

$\ln(y/(1-y))=t+C$. Donc $y(t)=1/[1+((1-y_0)/y_0)e^{-t}]$. La limite est 1. Si $y_0<0,9$, le temps d'atteinte de 0,9 vérifie $e^{-t}=y_0/[9(1-y_0)]$, donc $t=\ln(9(1-y_0)/y_0)$. Si $y_0\geq 0,9$, le seuil est déjà atteint à $t=0$.

Exercice 7. Oscillateur harmonique

$y=a \cos \omega t + (b/\omega) \sin \omega t$. $E'=2y'(y''+\omega^2 y)=0$, donc $E=b^2+\omega^2 a^2$. Dans le plan de phase, la trajectoire est un cercle de rayon $\sqrt{E}/\omega$ avec le second axe normalisé.

Exercice 8. Équation non linéaire par changement de variable

$z'=z$, donc $z=Ce^t$ et $y=\exp(Ce^t)$. La solution constante $y=1$ correspond à $C=0$. Si $y_0>1$, $C>0$ et croissance très rapide; si $0<y_0<1$, $C<0$ et $y\rightarrow 0$ quand $t\rightarrow\infty$ tout en restant positive.

Exercice 9. Conditionnement et Bayes

$P(+)=0,01\times 0,98+0,99\times 0,05=0,0593$. $P(M|+)=0,0098/0,0593\approx 0,1653$. Malgré un bon test, la majorité des positifs sont ici des faux positifs car la maladie est rare.

Exercice 10. Loi binomiale

$E(X)=\sum E(I_k)=np$. $\text{Var}(X)=\sum \text{Var}(I_k)=np(1-p)$. $P(X=0)=0,97^{100}\approx 0,0476$. $P(X\leq 1)=0,97^{100}+100\times 0,03\times 0,97^{99}\approx 0,194$. Approximation : $(1-p)^n\approx e^{-np}=e^{-3}\approx 0,0498$.

Exercice 11. Espérance et stratégie

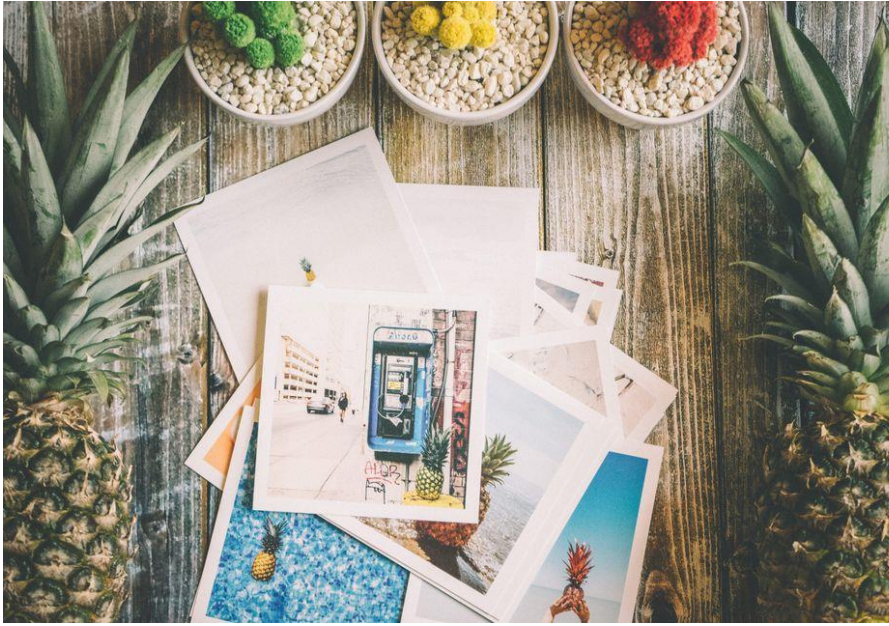


Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

$E=1+0,8-1,5=0,3$ €. $E(X^2)=10+1,6+4,5=16,1$, donc $\text{Var}=16,01$ et $\sigma \approx 4,001$. Prix équitable 0,30 €. Sur 100 parties : espérance 30 €, écart-type ≈ 40 €. Une espérance positive n'empêche pas une forte dispersion à court terme.

Exercice 12. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$E[(X-m)^2] \geq a^2 P(|X-m| \geq a)$. Pour la moyenne, variance σ^2/n , donc $P(|X_m - \mu| \geq \epsilon) \leq \sigma^2/(n\epsilon^2) \rightarrow 0$. La moyenne converge en probabilité vers μ .

Exercice 13. Marche aléatoire

$P(S_n = 2k-n) = C(n, k)/2^n$. $E=0$, $\text{Var}=n$. $P(S_{2n}=0) = C(2n, n)/4^n$. Avec Stirling, équivalent $1/\sqrt{\pi n}$.

Exercice 14. Problème de ruine simple

La récurrence donne $p_{i+1} - p_i = p_i - p_{i-1}$, donc $p_i = ai + b$. Les conditions donnent $p_i = i/N$. La probabilité de succès est exactement la fraction du capital initial dans l'objectif total.

Exercice 15. Algorithme d'Euclide et complexité

Pour F_{n+1}, F_n , les restes successifs sont $F_{n-1}, \dots, F_1, 0$: environ n étapes. Comme F_n croît comme $\phi^n/\sqrt{5}$, le nombre d'étapes est proportionnel au logarithme de la taille des entrées. Cela explique l'efficacité de l'algorithme malgré ses pires cas.

Exercice 16. Méthode probabiliste

$E(|A|) = n/2$. Si a_n est le nombre de parties admissibles, celles ne contenant pas n sont comptées par a_{n-1} ; celles contenant n ne contiennent pas $n-1$ et sont comptées par a_{n-2} . Donc $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, avec $a_0=1, a_1=2$, soit $a_n = F_{n+2}$. La probabilité vaut $F_{n+2}/2^n$.

Corrigés des problèmes

Problème A — Intégrale de Wallis

La récurrence est classique. $I_{2n} = \pi/2 \cdot (2n)!/[2^{2n}(n!)^2]$, $I_{2n+1} = 2^{2n}(n!)^2/(2n+1)!$. La décroissance vient de $0 \leq \sin x \leq 1$. Le rapport tend vers 1. Avec Stirling, $I_n \sim \sqrt{\pi/(2n)}$.

Problème B — File d'attente simplifiée

Avec la convention « service puis arrivée », la matrice par lignes est $P = \begin{bmatrix} 1-p, p, 0 \\ q(1-p), qp+(1-q)(1-p), (1-q)p \\ 0, q(1-p), 1-q(1-p) \end{bmatrix}$. Posons $r = p/[q(1-p)]$. Les équations de balance donnent $\pi_1 = r\pi_0$ et $\pi_2 = (1-q)r\pi_1$. Ainsi $\pi = (1, r, (1-q)r^2)/Z$, avec $Z = 1 + r + (1-q)r^2$. La probabilité de refus par minute



vaut $\pi^2(1-q)p$; conditionnellement à une arrivée, elle vaut $\pi^2(1-q)$. Lorsque p augmente ou q diminue, la masse se déplace vers les états élevés. Pour une capacité N , on obtient une chaîne naissance-mort sur $\{0, \dots, N\}$ et une matrice tridiagonale de taille $N+1$.

Problème C — Grand problème de passage en L1

La continuité vient de $\ln(1+x) \sim x$. $f(x) = [x/(1+x) - \ln(1+x)]/x^2 \leq 0$. Les bornes viennent des inégalités logarithmiques. Pour u_n , $n \ln(1+1/n) = 1 - 1/(2n) + O(1/n^2)$, donc le quotient par e vaut $1 - 1/(2n) + O(1/n^2)$, et $u_n \rightarrow -1/2$. A_n est une somme de Riemann convergeant vers $\int_0^1 \ln(1+x)/x \, dx$. La monotonie permet un encadrement par sommes gauche et droite, d'erreur $O(1/n)$.

Bilan personnel

Compétence	Acquis	À reprendre
Calcul exact et transformations algébriques	☐	☐
Choix d'une méthode	☐	☐
Usage correct des théorèmes	☐	☐
Rédaction d'une preuve	☐	☐
Contrôle de cohérence	☐	☐
Autonomie sur un problème long	☐	☐

Sources d'inspiration pédagogique

Repères utilisés pour concevoir la collection : programmes officiels de Première, Terminale spécialité et Mathématiques expertes ; programmes et commentaires de Terminale C du début des années 1970 ; cahiers et devoirs de Terminale C 1974-1975 ; annales du baccalauréat C 1974-1975. Les énoncés et corrigés de cette collection sont des créations originales.

Fin du cahier. Refaire les exercices marqués « Prépa » ou « Défi » une semaine plus tard.