

CAHIER 5

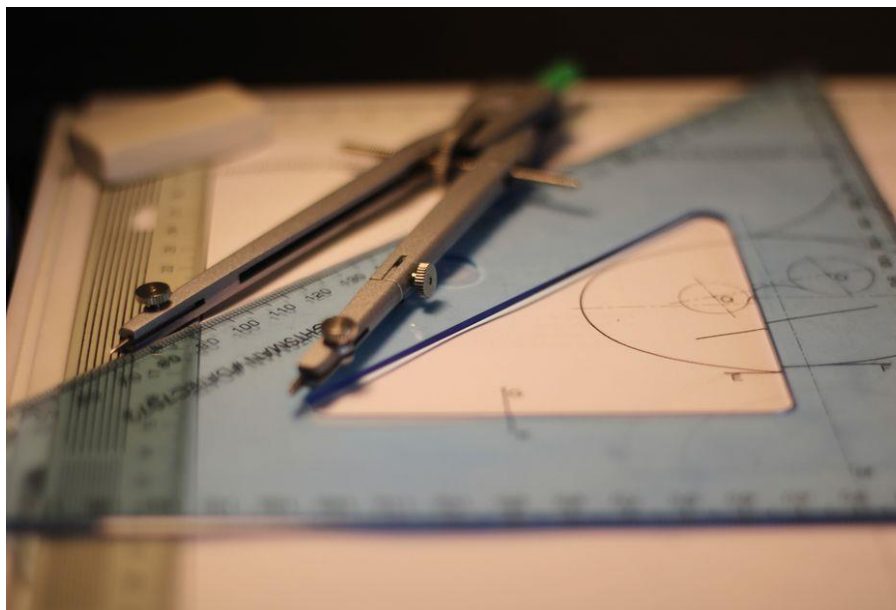


Figure geometrique pedagogique illustrant la notion

Géométrie affine, euclidienne et algèbre linéaire

Vecteurs, transformations, coniques et espace

Cahiers de vacances — passage en L1
Niveau très exigeant, esprit prépa et ancienne série C

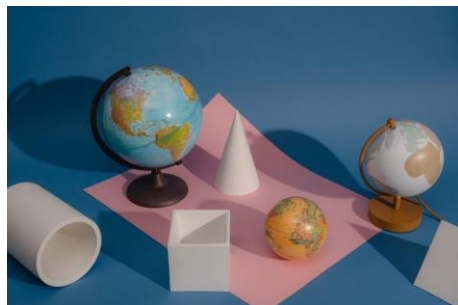


Objectif : autonomie, rigueur, culture mathématique et préparation aux raisonnements universitaires.

Présentation du cahier

Cette collection prépare un étudiant entrant en L1 scientifique, économique ou de gestion quantitative. Elle reprend les grands contenus de Première, Terminale spécialité et Mathématiques expertes, mais avec une exigence de démonstration, de calcul et d'autonomie inspirée de l'ancienne série C. Les exercices sont originaux et progressent de la consolidation vers des problèmes de niveau prépa.

Objectifs



- Maîtriser bases, coordonnées, applications linéaires et déterminants.
- Raisonner sur les transformations affines et les isométries.
- Étudier droites, plans, sphères et distances dans l'espace.
- Retrouver une géométrie structurée dans l'esprit de la série C.

Méthode de travail

1. Travailler sans calculatrice pendant la première tentative.
2. Rédiger les quantificateurs, les hypothèses et les conclusions.
3. Chercher au moins vingt minutes avant de lire une piste.
4. Reprendre l'exercice deux jours plus tard sans regarder la correction.
5. Tenir un carnet des erreurs : calcul, logique, méthode, rédaction.

Barème conseillé

Niveau	Temps indicatif	Attendu
Consolidation	10 à 20 min	Calcul exact et rédaction propre
Approfondissement	20 à 35 min	Choix de méthode et justification
Prépa	35 à 60 min	Démonstration structurée
Défi / très exigeant	60 à 90 min	Autonomie et synthèse

Conseil : masquer les corrigés pendant la première semaine de travail.

I. Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1. Bases et coordonnées [Consolidation]

Éléments du cours : Espaces vectoriels ; familles libres et génératrices ; bases ; coordonnées ; déterminant.

Indication / méthode : Former la matrice ayant u, v, w pour colonnes. Un déterminant non nul prouve qu'il s'agit d'une base ; les coordonnées se trouvent ensuite par résolution d'un système linéaire.

Formules / outils utiles : Dans $\mathbb{R}^3$, $\det(u, v, w) \neq 0 \Leftrightarrow (u, v, w)$ est une base.

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u=(1,1,0)$, $v=(1,0,1)$, $w=(0,1,1)$.

- 1) Montrer que (u, v, w) est une base.
- 2) Déterminer les coordonnées de $x=(2,3,4)$ dans cette base.
- 3) Exprimer la base canonique dans la base (u, v, w) .

Piste (à lire seulement après recherche) : Calculer le déterminant de la matrice ayant u, v, w pour colonnes.

Espace de travail :

Exercice 2. Noyau et image [Approfondissement]

Éléments du cours : Application linéaire ; matrice ; noyau ; image ; rang ; injectivité et surjectivité.

Indication / méthode : Écrire la matrice dans la base canonique, résoudre $f(x)=0$ pour le noyau puis identifier les colonnes indépendantes pour l'image. Utiliser le théorème du rang comme contrôle.

Formules / outils utiles : $\dim(\text{Ker } f) + \text{rg}(f) = \dim(E)$; f injective $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\}$.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x+y, y+z, x+2y+z)$.

- 1) Écrire la matrice de f .
- 2) Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.
- 3) Donner le rang de f .
- 4) La transformation est-elle injective ? surjective ?

Piste (à lire seulement après recherche) : Observer que la troisième composante est la somme des deux premières.

Espace de travail :



Figure géométrique pédagogique illustrant la notion

Exercice 3. Déterminant et aire [Prépa]

Éléments du cours : Déterminant en dimension 2 ; aire orientée ; équation de droite ; distance point-droite.

Indication / méthode : Construire les vecteurs AB et AC. Le déterminant donne directement l'aire ; vérifier ensuite avec la formule $\text{base} \times \text{hauteur} / 2$ en calculant la distance de C à (AB).

Formules / outils utiles : $\text{Aire}(ABC) = |\det(AB, AC)| / 2$; $d(M, Ax + By + C = 0) = |Ax_M + By_M + C| / \sqrt{A^2 + B^2}$.

Soient A(1,2), B(4,-1), C(-2,3).

- 1) Calculer l'aire du triangle ABC.
- 2) Déterminer l'équation de la droite (AB).
- 3) Calculer la distance de C à (AB) et vérifier la formule $\text{aire} = \text{base} \times \text{hauteur} / 2$.
- 4) Généraliser avec un déterminant.

Piste (à lire seulement après recherche) : Utiliser $\det(AB, AC)$.

Espace de travail :

Exercice 4. Projecteurs [Défi]

Éléments du cours : Endomorphisme projecteur ; noyau et image ; somme directe ; valeurs propres ; matrice dans une base adaptée.

Indication / méthode : Pour tout x, décomposer $x = (x - p(x)) + p(x)$. Vérifier que le premier terme est dans $\text{Ker } p$ et le second dans $\text{Im } p$.

Formules / outils utiles : $p^2 = p$; valeurs propres possibles : $\lambda^2 = \lambda$, donc $\lambda \in \{0, 1\}$; $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$.

Soit $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linéaire et vérifiant $p^2 = p$.

- 1) Montrer $\mathbb{R}^2 = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$.
- 2) Montrer que les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1.
- 3) Classer les projecteurs de $\mathbb{R}^2$ selon leur rang.
- 4) Donner la matrice du projecteur sur la droite $y = x$ parallèlement à l'axe des ordonnées.

Piste (à lire seulement après recherche) : Écrire $x = (x - px) + px$.

Espace de travail :

II. Géométrie affine et barycentres



Figure géométrique pédagogique illustrant la notion

Exercice 5. Barycentre [Consolidation]

Éléments du cours : Barycentres pondérés ; vecteurs ; coordonnées affines ; construction géométrique.

Indication / méthode : Vérifier que la somme des coefficients n'est pas nulle, puis écrire la relation barycentrique avec un origine pratique (A ou un point M arbitraire).

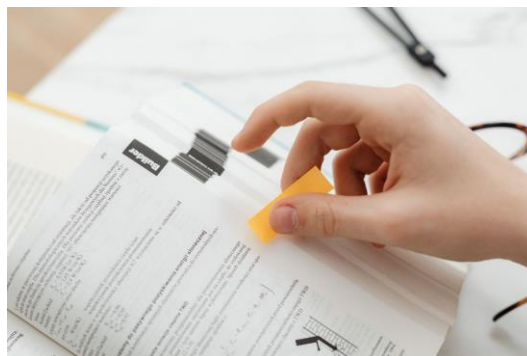
Formules / outils utiles : Si $\sum \alpha_i \neq 0$, G vérifie $\sum \alpha_i \cdot GA_i = 0$; pour tout M, $\sum \alpha_i \cdot MA_i = (\sum \alpha_i)MG$.

Soient A,B,C non alignés et G le barycentre de (A,2),(B,3),(C,-1).

- 1) Justifier l'existence.
- 2) Exprimer AG avec AB et AC.
- 3) Construire G géométriquement.
- 4) Montrer que, pour tout M, $2MA + 3MB - MC = 4MG$ en écriture vectorielle.

Piste (à lire seulement après recherche) : La somme des coefficients vaut 4.

Espace de travail :

Exercice 6. Application affine [Approfondissement]

Éléments du cours : Applications affines ; partie linéaire ; image d'un repère affine ; barycentres ; composition.

Indication / méthode : Une application affine du plan est déterminée par l'image de trois points non alignés. Utiliser ensuite la conservation des barycentres et composer trois fois.

Formules / outils utiles : $F(x) = Lx + b$; une application affine conserve les combinaisons barycentriques de somme des coefficients égale à 1.

Une application affine F du plan vérifie $F(A)=B$, $F(B)=C$, $F(C)=A$ pour un triangle ABC.

- 1) Montrer que F est entièrement déterminée.
- 2) Déterminer $F(G)$, où G est le centre de gravité.
- 3) Montrer $F^3 = \text{Id}$.
- 4) Étudier la partie linéaire de F.

Piste (à lire seulement après recherche) : Une application affine est déterminée par l'image de trois points non alignés.

Espace de travail :

Exercice 7. Homothéties et translations [Prépa]

Éléments du cours : Transformations affines ; homothéties ; translations ; composition.

Indication / méthode : Écrire chaque homothétie sous forme vectorielle puis composer algébriquement. Le coefficient de x indique si la composée est une homothétie ou une translation.

Formules / outils utiles : $H_{A,\alpha}(x) = \alpha x + (1-\alpha)a$; translation : $T_v(x) = x + v$.

- 1) Calculer la composée de deux homothéties $H_{A,\alpha}$ et $H_{B,\beta}$.
- 2) Montrer que si $\alpha\beta \neq 1$, la composée est une homothétie.
- 3) Si $\alpha\beta = 1$ et $A \neq B$, montrer que c'est une translation.
- 4) Déterminer son vecteur.

Piste (à lire seulement après recherche) : Écrire les applications sous forme vectorielle $x \mapsto \alpha x + (1-\alpha)a$.

Espace de travail :

Exercice 8. Théorème de Ceva [Défi]

Éléments du cours : Géométrie affine ; barycentres ; rapports orientés ; aires ; concurrence de céviennes.

Indication / méthode : Introduire le point de concours éventuel et comparer des triangles partageant une même hauteur. Les rapports de segments se traduisent en rapports d'aires.

Formules / outils utiles : Condition de Ceva : $(BD/DC)(CE/EA)(AF/FB) = 1$, avec rapports orientés dans la forme générale.

Dans un triangle ABC , $D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$.

- 1) À l'aide des barycentres ou des aires orientées, démontrer que AD , BE et CF sont concourantes si et seulement si $(BD/DC)(CE/EA)(AF/FB) = 1$.
- 2) Appliquer aux médianes.
- 3) Appliquer aux bissectrices internes.

Piste (à lire seulement après recherche) : Introduire le point de concours P et comparer les aires de triangles partageant une hauteur.

Espace de travail :



III. Géométrie euclidienne et isométries

Exercice 9. Projection orthogonale [Consolidation]

Éléments du cours : Plan de $\mathbb{R}^3$; vecteur normal ; projection orthogonale ; distance point-plan.

Indication / méthode : La projection H de M sur P s'écrit $M - t n$, où n est normal au plan. Déterminer t en imposant que H appartienne à P.

Formules / outils utiles : $d(M,P) = |ax_M + by_M + cz_M + d| / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ pour P: $ax + by + cz + d = 0$.

Dans $\mathbb{R}^3$, projeter orthogonalement $M(2,-1,3)$ sur le plan P : $x+2y-2z+1=0$. Calculer la distance de M à P.

Piste (à lire seulement après recherche) : Le vecteur normal est $n=(1,2,-2)$.

Espace de travail :

Exercice 10. Composée de réflexions [Approfondissement]

Éléments du cours : Isométries du plan ; réflexions ; rotations ; translations ; angles orientés.

Indication / méthode : Suivre l'effet des deux réflexions sur les directions. Pour des axes sécants, le point d'intersection reste fixe ; pour des axes parallèles, aucun point fixe en général.

Formules / outils utiles : Deux réflexions d'axes faisant un angle θ composées donnent une rotation d'angle 2θ ; pour des axes parallèles distants de d, la translation a une norme $2d$.

- 1) Montrer que la composée de deux réflexions d'axes sécants est une rotation.
- 2) Relier l'angle de rotation à l'angle des axes.
- 3) Montrer que la composée de deux réflexions d'axes parallèles est une translation.
- 4) Déterminer son vecteur.

Piste (à lire seulement après recherche) : Suivre un vecteur direction ou utiliser les angles orientés.

Espace de travail :

Exercice 11. Cercle d'Euler [Prépa]

Éléments du cours : Vecteurs dans un triangle ; orthocentre ; centre de gravité ; cercle circonscrit ; droite d'Euler.

Indication / méthode : Prendre O comme origine et exploiter $|a|=|b|=|c|$. Montrer que le vecteur $a+b+c$ place un point sur les trois hauteurs, puis comparer avec le barycentre.

Formules / outils utiles : $g=(a+b+c)/3$; si O est origine du cercle circonscrit, les produits scalaires permettent de vérifier les perpendicularités.

Dans un triangle ABC, soient H l'orthocentre, O le centre du cercle circonscrit et G le centre de gravité.

- 1) En prenant O pour origine, montrer $h=a+b+c$.
- 2) Montrer $g=(a+b+c)/3$.
- 3) En déduire que O,G,H sont alignés et $OG:GH=1:2$.
- 4) Montrer que le centre N du cercle des neuf points est le milieu de OH.

Piste (à lire seulement après recherche) : Utiliser les produits scalaires pour vérifier que AH est perpendiculaire à BC.

Espace de travail :

Exercice 12. Classification des isométries du plan [Défi]

Éléments du cours : Applications affines isométriques ; matrices orthogonales ; déterminant ; points fixes.

Indication / méthode : Séparer les cas $\det(L)=1$ et $\det(L)=-1$ pour la partie linéaire L. Puis distinguer l'existence ou non d'un point fixe pour identifier la translation ou la symétrie glissée.

Formules / outils utiles : L orthogonale $\Leftrightarrow L^T L = I$; $\det(L) = \pm 1$.

Montrer qu'une isométrie du plan est, selon les cas, une translation, une rotation, une réflexion ou une symétrie glissée. On pourra admettre qu'une isométrie affine a une partie linéaire orthogonale.

Piste (à lire seulement après recherche) : Classer les matrices orthogonales de dimension 2 selon leur déterminant et l'existence d'un point fixe.

Espace de travail :

IV. Coniques et espace



Représentation graphique de la fonction étudiée

Exercice 13. Parabole foyer-directrice [Consolidation]

Éléments du cours : Définition métrique d'une parabole ; distance point-point ; distance point-droite ; mise sous forme canonique.

Indication / méthode : Pour $M(x,y)$, écrire $MF = \text{distance}(M, \text{directrice})$, puis élever au carré et simplifier. La forme obtenue permet d'identifier sommet et axe.

Formules / outils utiles : Parabole : $MF = d(M, \Delta)$; distance à $y=c$: $|y-c|$.

Déterminer l'équation de la parabole de foyer $F(0,1)$ et de directrice $y=-1$. Identifier son sommet et son axe.

Piste (à lire seulement après recherche) : Égaler MF et la distance de M à la directrice.

Espace de travail :

Exercice 14. Réduction d'une conique [Approfondissement]

Éléments du cours : Forme quadratique ; terme croisé xy ; changement de base orthonormé ; rotation ; valeurs propres.

Indication / méthode : Écrire la forme quadratique sous forme matricielle. Les directions principales sont les vecteurs propres ; ici la symétrie suggère une rotation de $\pi/4$.

Formules / outils utiles : Pour $Ax^2+Bxy+Cy^2$, $\tan(2\theta)=B/(A-C)$ lorsque $A \neq C$; dans une base propre, la forme devient $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$.

Réduire et identifier la conique $5x^2-6xy+5y^2=8$.

- 1) Trouver les directions principales.
- 2) Effectuer une rotation de $\pi/4$.
- 3) Donner les demi-axes.

Piste (à lire seulement après recherche) : Poser $u=(x+y)/\sqrt{2}$ et $v=(x-y)/\sqrt{2}$.

Espace de travail :

Exercice 15. Droites et plans dans l'espace [Prépa]

Éléments du cours : Droite paramétrique ; plan cartésien ; intersection ; angles ; plan engendré par des directions.

Indication / méthode : Injecter les coordonnées de la droite dans l'équation du plan pour l'intersection. Pour l'angle, utiliser le produit scalaire entre le vecteur directeur de D et le normal de P.

Formules / outils utiles : $\sin(\text{angle}(D,P)) = |u \cdot n| / (||u|| \cdot ||n||)$; un plan contenant D a pour directions u et un second vecteur adapté.

Soient $D : (x,y,z) = (1,0,2) + t(1,2,-1)$ et $P : 2x - y + z = 3$.

- 1) Étudier l'intersection.
- 2) Déterminer l'angle entre D et P.
- 3) Trouver le plan Q contenant D et perpendiculaire à P.

Piste (à lire seulement après recherche) : Le vecteur normal de P est $n = (2, -1, 1)$. Pour Q, son normal doit être orthogonal à la direction de D et appartenir au plan engendré par n et un vecteur adapté.

Espace de travail :

Exercice 16. Intersection de sphères [Défi]

Éléments du cours : Sphères ; plan radical ; distance entre centres ; cercle d'intersection.

Indication / méthode : Soustraire les deux équations de sphères : les termes quadratiques disparaissent et donnent le plan du cercle. Projeter ensuite un centre sur ce plan pour trouver le centre du cercle.

Formules / outils utiles : Si H est le centre du cercle dans une sphère de rayon R et $d = \text{distance}(\text{centre}, H)$, alors $r^2 = R^2 - d^2$.

$S1 : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ et $S2 : (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$.

- 1) Déterminer le plan du cercle d'intersection.
- 2) Déterminer son centre.
- 3) Calculer son rayon.
- 4) Discuter la géométrie des deux sphères.

Piste (à lire seulement après recherche) : Soustraire les équations puis projeter le centre d'une sphère sur le plan radical.

Espace de travail :

Problèmes de synthèse

Problème A — Simson et géométrie vectorielle



Éléments du cours : Projections orthogonales ; quadrilatères cycliques ; angles orientés ; cercle circonscrit ; alignement.

Indication / méthode : Chaque projection fournit un angle droit, donc un cercle de diamètre commun. Utiliser ensuite les égalités d'angles inscrits pour comparer les directions de PQ, QR et PR.

Formules / outils utiles : Deux points X,Y vérifiant $\angle XMY=90^\circ$ appartiennent au cercle de diamètre XY ; dans un même cercle, des angles inscrits interceptant la même corde sont égaux.

Niveau : Prépa renforcée

Soit ABC un triangle et M un point de son cercle circonscrit. Les projections orthogonales de M sur BC, CA et AB sont P,Q,R.

- 1) Montrer que M,P,C,Q sont cocycliques.
- 2) Montrer que M,Q,A,R sont cocycliques.
- 3) Comparer les angles orientés (PQ,BC), (QR,CA) et (PR,AB).
- 4) En déduire que P,Q,R sont alignés : droite de Simson.
- 5) Étudier le cas où M est l'un des sommets.

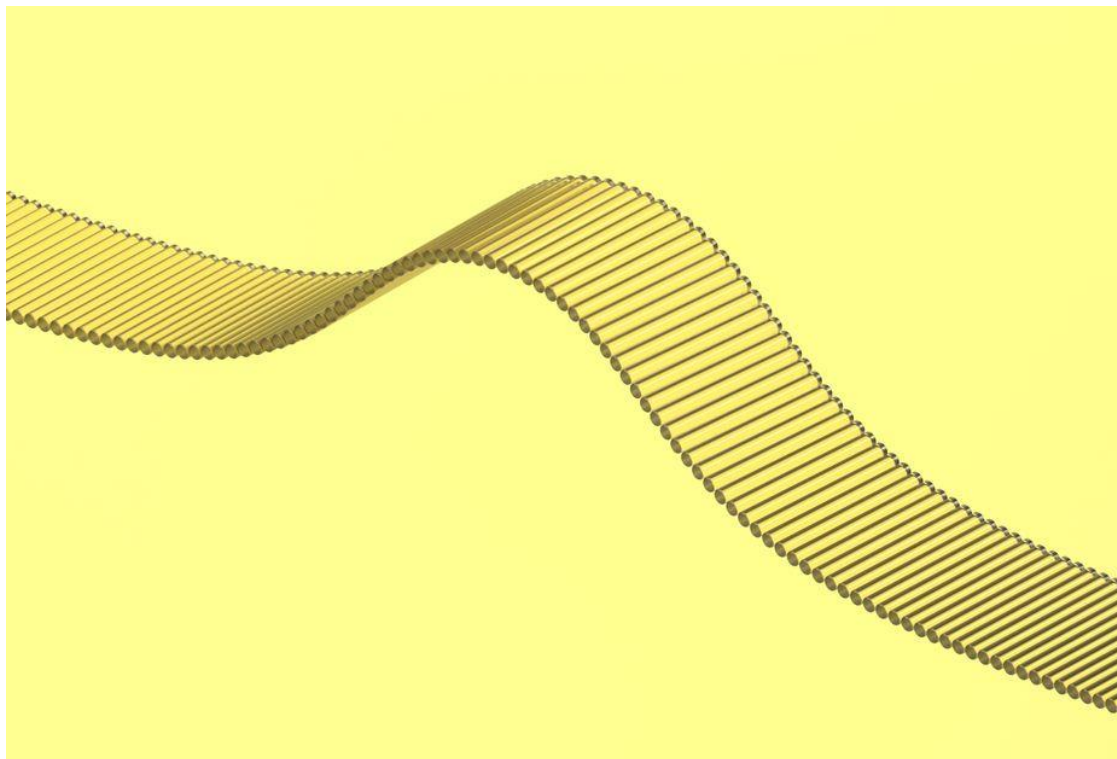
Piste globale : Utiliser les angles droits pour les cocyclicités puis le fait que M appartient au cercle ABC.

.....

.....

.....

Problème B — Quadratique, ellipse et optimisation



Représentation graphique de la fonction étudiée

Éléments du cours : Forme quadratique ; matrice symétrique ; valeurs propres ; ellipse ; optimisation d'une forme linéaire.

Indication / méthode : Diagonaliser la matrice $\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$. Les valeurs propres donnent la positivité et les axes de l'ellipse. Pour maximiser $x \pm y$, utiliser la base propre ou Cauchy-Schwarz.

Formules / outils utiles : Valeurs propres : $1 + \lambda$ et $1 - \lambda$; aire de $\{x^T A x \leq 1\}$ en dimension 2 : $\pi / \sqrt{\det(A)}$ lorsque A est définie positive.

Niveau : Très exigeant

Pour λ réel, on considère $Q_\lambda(x, y) = x^2 + 2\lambda xy + y^2$.

- 1) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles Q_λ est définie positive.
- 2) Réduire Q_λ dans une base orthonormée.
- 3) Pour $|\lambda| < 1$, étudier la courbe $Q_\lambda(x, y) = 1$.
- 4) Déterminer ses axes et son aire.
- 5) Parmi les points de cette ellipse, maximiser $x + y$ puis $x - y$.

Piste globale : Les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$ diagonaliseront la forme.

.....

.....

.....

Corrigés et éléments de solution

Les corrigés privilégient les idées, les étapes décisives et les contrôles. Une rédaction personnelle complète reste indispensable.

Exercice 1. Bases et coordonnées

Le déterminant vaut -2 , donc base. Résoudre $\alpha u + \beta v + \gamma w = (2, 3, 4)$: $\alpha + \beta = 2$, $\alpha + \gamma = 3$, $\beta + \gamma = 4$, d'où $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/2$, $\gamma = 5/2$. Les vecteurs canoniques s'obtiennent de même : $e_1 = (u+v-w)/2$, $e_2 = (u-v+w)/2$, $e_3 = (-u+v+w)/2$.

Exercice 2. Noyau et image



Figure géométrique pédagogique illustrant la notion

$M = [[1, 1, 0], [0, 1, 1], [1, 2, 1]]$. Le noyau vérifie $x = -y, z = -y$, donc $\text{Ker} = \text{Vect}((-1, 1, -1))$. L'image est le plan $\{(a, b, c) : c = a + b\}$, de dimension 2. Rang 2, ni injective ni surjective.

Exercice 3. Déterminant et aire

$AB = (3, -3)$, $AC = (-3, 1)$. $\det = -6$, donc aire 3. Droite AB : $x + y - 3 = 0$. Distance de C : $|-2 + 3 - 3|/\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Longueur $AB = 3\sqrt{2}$, donc $1/2 \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3$. En général $\text{aire} = |\det(B-A, C-A)|/2$.

Exercice 4. Projecteurs

La décomposition est directe car un vecteur dans $\text{Ker} \cap \text{Im}$ est à la fois $y = pz$ et $py = 0$, mais $py = p^2z = pz = y$. Les valeurs propres vérifient $\lambda^2 = \lambda$. Rangs possibles 0, 1, 2. Pour projeter (x, y) sur $y = x$ le long de la direction verticale, on garde l'abscisse : $p(x, y) = (x, x)$, matrice $[[1, 0], [1, 0]]$.

Exercice 5. Barycentre

$AG = (3AB - AC)/4$. Pour construire, prendre d'abord le barycentre H de A et B de poids 2 et 3, puis G barycentre de H poids 5 et C poids -1. L'identité vectorielle est la propriété fondamentale du barycentre.

Exercice 6. Application affine

$F(G) = G$ car elle conserve les barycentres. F^3 fixe A, B, C, donc vaut l'identité. La partie linéaire L vérifie $L^3 = I$; ses valeurs propres complexes sont des racines cubiques de l'unité. Si le triangle n'est pas équilatéral, F n'est pas une isométrie euclidienne en général, mais reste une transformation affine d'ordre 3.

Exercice 7. Homothéties et translations

La composée vaut $x \mapsto \alpha\beta x + \beta(1-\alpha)a + (1-\beta)b$. Si $\alpha\beta \neq 1$, c'est une homothétie de centre $c = [\beta(1-\alpha)a + (1-\beta)b]/(1-\alpha\beta)$. Si $\alpha\beta = 1$, la partie linéaire est l'identité et le vecteur de translation est $\beta(1-\alpha)a + (1-\beta)b = (\beta-1)(a-b)$.

Exercice 8. Théorème de Ceva

La preuve standard par rapports d'aires donne le produit égal à 1. Réciproquement, fixer l'intersection de AD et BE puis utiliser l'unicité du point de F sur AB donnant le rapport requis. Pour les médianes, chaque rapport vaut 1. Pour les bissectrices, utiliser le théorème de la bissectrice : $BD/DC=AB/AC$, etc., et le produit se simplifie.

Exercice 9. Projection orthogonale

La valeur de l'équation en M est $2-2-6+1=-5$. Le projeté est $H=M-(-5/9)n=M+(5/9)(1,2,-2)=(23/9,1/9,17/9)$. Distance $=5/3$.

Exercice 10. Composée de réflexions

Deux réflexions d'axes sécants en O donnent une rotation de centre O et d'angle deux fois l'angle orienté du premier axe vers le second. Pour deux axes parallèles, la composée est une translation perpendiculaire aux axes, de longueur deux fois leur distance, orientée du premier vers le second selon l'ordre de composition.

Exercice 11. Cercle d'Euler

Comme $|a|=|b|=|c|$, $(h-a) \cdot (b-c) = (b+c) \cdot (b-c) = |b|^2 - |c|^2 = 0$, donc $h=a+b+c$. Puis $g=h/3$. Ainsi G appartient à OH et $HG=2OG$. Le centre du cercle des neuf points est le milieu de O et H ; les milieux des côtés et les pieds des hauteurs sont à distance $R/2$ de ce point.

Exercice 12. Classification des isométries du plan

Si $\det=1$, la partie linéaire est une rotation. Si l'isométrie a un point fixe, c'est une rotation; sinon, le seul cas sans point fixe est la translation. Si $\det=-1$, la partie linéaire est une réflexion. Avec point fixe : réflexion; sans point fixe : réflexion suivie d'une translation parallèle à l'axe, soit symétrie glissée.

Exercice 13. Parabole foyer-directrice

$x^2+(y-1)^2=(y+1)^2$, donc $x^2=4y$. Sommet O, axe Oy, paramètre $p=1$.

Exercice 14. Réduction d'une conique

$x^2+y^2=u^2+v^2$ et $xy=(u^2-v^2)/2$. L'équation devient $2u^2+8v^2=8$, soit $u^2/4+v^2=1$. C'est une ellipse de demi-axes 2 et 1, axes dirigés par $(1,1)$ et $(1,-1)$.

Exercice 15. Droites et plans dans l'espace

Substitution : $2(1+t)-2t+(2-t)=4-t=3$, donc $t=1$ et intersection $(2,2,1)$. L'angle φ entre la droite et le plan vérifie $\sin\varphi=|d \cdot n|/(||d|| ||n||)=|2-2-1|/(\sqrt{6}\sqrt{6})=1/6$. Pour Q, un normal q doit être orthogonal à d et à ? Un plan Q perpendiculaire à P a des normaux $q \cdot n=0$, et contient D donc $q \cdot d=0$. On peut prendre $q=d \times n=(1,2,-1) \times (2,-1,1)=(1,-3,-5)$ à un facteur près. Équation par $(1,0,2)$: $(x-1)-3y-5(z-2)=0$.



Exercice 16. Intersection de sphères

S_2 développée : $x^2+y^2+z^2-4x-2z+1=0$. Avec $S_1 : 9-4x-2z+1=0$, donc $2x+z=5$. Centre $O_1=(0,0,0)$, $O_2=(2,0,1)$. Le plan est perpendiculaire à O_1O_2 . La projection de O_1 sur $2x+z=5$ est $H=(2,0,1)=O_2$, ce qui indique que O_2 appartient au plan? $2 \cdot 2 + 1 = 5$ oui. Le cercle est donc la section de S_1 par un plan à distance $\sqrt{5}$ de O_1 , rayon $\sqrt{(9-5)}=2$. Cela coïncide avec S_2 , de centre O_2 et rayon 2 : le cercle d'intersection est le grand cercle de S_2 situé dans son plan équatorial perpendiculaire à O_1O_2 .



Corrigés des problèmes

Problème A — Simson et géométrie vectorielle

Les quadrilatères possèdent deux angles droits opposés, donc sont cycliques. Les égalités d'angles inscrits permettent de transférer les directions et d'obtenir un angle nul entre PQ et PR. Les trois pieds sont donc alignés. Si $M=A$, deux projections coïncident avec A et la droite obtenue est la hauteur issue de A.

Problème B — Quadratique, ellipse et optimisation

Les valeurs propres sont $1+\lambda$ et $1-\lambda$. Définie positive si $|\lambda|<1$. Avec $u=(x+y)/\sqrt{2}$, $v=(x-y)/\sqrt{2}$: $Q=(1+\lambda)u^2+(1-\lambda)v^2$. L'ellipse a demi-axes $1/\sqrt{1+\lambda}$ et $1/\sqrt{1-\lambda}$, aire $\pi/\sqrt{1-\lambda^2}$. Comme $x+y=\sqrt{2}u$, son maximum est $\sqrt{2/(1+\lambda)}$; celui de $x-y$ est $\sqrt{2/(1-\lambda)}$.

Bilan personnel

Compétence	Acquis	À reprendre
Calcul exact et transformations algébriques	☐	☐
Choix d'une méthode	☐	☐
Usage correct des théorèmes	☐	☐
Rédaction d'une preuve	☐	☐
Contrôle de cohérence	☐	☐
Autonomie sur un problème long	☐	☐

Sources d'inspiration pédagogique

Repères utilisés pour concevoir la collection : programmes officiels de Première, Terminale spécialité et Mathématiques expertes ; programmes et commentaires de Terminale C du début des années 1970 ; cahiers et devoirs de Terminale C 1974-1975 ; annales du baccalauréat C 1974-1975. Les énoncés et corrigés de cette collection sont des créations originales.

Fin du cahier. Refaire les exercices marqués « Prépa » ou « Défi » une semaine plus tard.