

CAHIER 4

Complexes, arithmétique, matrices et graphes

Le cœur de Mathématiques expertes, prolongé vers l'algèbre

*Cahiers de vacances — passage en L1
Niveau très exigeant, esprit prépa et ancienne série C*



Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

Objectif : autonomie, rigueur, culture mathématique et préparation aux raisonnements universitaires.

Présentation du cahier

Cette collection prépare un étudiant entrant en L1 scientifique, économique ou de gestion quantitative. Elle reprend les grands contenus de Première, Terminale spécialité et Mathématiques expertes, mais avec une exigence de démonstration, de calcul et d'autonomie inspirée de l'ancienne série C. Les exercices sont originaux et progressent de la consolidation vers des problèmes de niveau prépa.

Objectifs

- Calculer et raisonner dans le plan complexe.
- Maîtriser divisibilité, congruences et équations diophantiennes.
- Utiliser les matrices pour les récurrences et les graphes.
- Découvrir des structures algébriques simples dans l'esprit de l'ancienne série C.

Méthode de travail

1. Travailler sans calculatrice pendant la première tentative.
2. Rédiger les quantificateurs, les hypothèses et les conclusions.
3. Chercher au moins vingt minutes avant de lire une piste.
4. Reprendre l'exercice deux jours plus tard sans regarder la correction.
5. Tenir un carnet des erreurs : calcul, logique, méthode, rédaction.

Barème conseillé

Niveau	Temps indicatif	Attendu
Consolidation	10 à 20 min	Calcul exact et rédaction propre
Approfondissement	20 à 35 min	Choix de méthode et justification
Prépa	35 à 60 min	Démonstration structurée
Défi / très exigeant	60 à 90 min	Autonomie et synthèse

Conseil : masquer les corrigés pendant la première semaine de travail.

I. Nombres complexes

Exercice 1. Formes algébrique et trigonométrique [Consolidation]

Éléments du cours : Nombres complexes ; module, argument ; forme trigonométrique/exponentielle ; conjugué ; formule de Moivre.

Indication / méthode : Pour les puissances, passer d'abord en forme polaire. Pour les quotients, calculer module et argument ou rationaliser avec le conjugué.

Formules / outils utiles : $z=re^{i\theta}$; $z^n=r^n e^{in\theta}$; $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$; $\arg(z_1 z_2)=\arg z_1 + \arg z_2 \bmod 2\pi$.

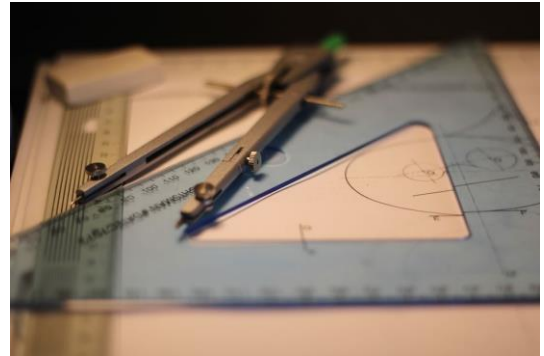
Mettre sous forme algébrique puis trigonométrique :

a) $(1+i)^8$; b) $(1-i\sqrt{3})^6$; c) $(2+i)/(1-2i)$; d) $(1+i)/(1-i)$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Calculer modules et arguments avant les puissances.

Espace de travail :

Exercice 2. Racines n-ièmes [Approfondissement]



Éléments du cours : Équations $z^n=a$; racines de l'unité ; cercle trigonométrique ; coefficients d'un polynôme.

Indication / méthode : Écrire le second membre sous forme $re^{i\theta}$, puis répartir les arguments de $2\pi/n$ en $2\pi/n$. Pour sommes et produits, utiliser aussi les relations entre racines et coefficients.

Formules / outils utiles : $z^n=re^{i\theta} \Rightarrow z_k=r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}$, $k=0, \dots, n-1$.

1) Résoudre $z^6=64$.

2) Résoudre $z^4=-16$.

3) Montrer que la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle pour $n \geq 2$.

4) Calculer leur produit.

Piste (à lire seulement après recherche) : Écrire les solutions sur le cercle puis utiliser les coefficients du polynôme X^n-1 .

Espace de travail :

Exercice 3. Géométrie complexe [Prépa]

Éléments du cours : Affixes ; module comme distance ; argument comme angle orienté ; cercle d'Apollonius ; arcs capables.

Indication / méthode : Traduire d'abord chaque module en distance et chaque quotient d'affixes en rapport de distances ou angle orienté. Revenir ensuite à une équation cartésienne si nécessaire.

Formules / outils utiles : $|z-a|=AM$; $\arg((z-a)/(z-b)) = \text{angle orienté } (BM, AM) \text{ modulo } 2\pi$.

Dans le plan complexe, $A(a)$, $B(b)$, $M(z)$.

- 1) Traduire $|z-a|=|z-b|$.
- 2) Traduire $\arg((z-a)/(z-b))=\pi/2 \text{ modulo } \pi$.
- 3) Déterminer le lieu défini par $|(z-1)/(z+1)|=2$.
- 4) Déterminer le lieu $\arg((z-1)/(z+1))=\pi/3 \text{ modulo } \pi$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Les modules donnent des cercles d'Apollonius ; les arguments donnent des arcs capables.

Espace de travail :

Exercice 4. Transformation homographique [Défi]

Éléments du cours : Transformation de Möbius ; inversion algébrique ; cercle unité ; demi-plans ; image de droites et cercles.

Indication / méthode : Résoudre d'abord $w=(z-1)/(z+1)$ en z . Pour déterminer l'image d'un ensemble, transformer sa condition géométrique en une condition sur $|w|$ ou $\text{Re}(w)$.

Formules / outils utiles : $w=(z-1)/(z+1) \Leftrightarrow z=(1+w)/(1-w)$, $w \neq 1$.

Soit $w=(z-1)/(z+1)$, $z \neq -1$.

- 1) Exprimer z en fonction de w .
- 2) Déterminer l'image de l'axe imaginaire.
- 3) Déterminer l'image du demi-plan $\text{Re}(z)>0$.
- 4) Interpréter géométriquement la transformation.

Piste (à lire seulement après recherche) : Calculer $|w|$ lorsque z est imaginaire pur, puis étudier $|w|<1$ ou >1 .

Espace de travail :

II. Arithmétique

Exercice 5. Algorithme d'Euclide [Consolidation]

Éléments du cours : PGCD ; algorithme d'Euclide ; identité de Bézout ; équations diophantiennes linéaires.

Indication / méthode : Effectuer les divisions euclidiennes puis remonter les égalités pour obtenir Bézout. Une équation $ax+by=c$ est soluble si le pgcd de a et b divise c .

Formules / outils utiles : $\text{pgcd}(a,b)=\text{pgcd}(b,r)$ si $a=bq+r$; $ax+by=c$ soluble $\Leftrightarrow \text{pgcd}(a,b) \mid c$.

- 1) Calculer $\text{pgcd}(252,198)$ et écrire une identité de Bézout.
- 2) Résoudre $252x+198y=18$.
- 3) Déterminer toutes les solutions entières.

Piste (à lire seulement après recherche) : Remonter l'algorithme d'Euclide.

Espace de travail :

Exercice 6. Équation diophantienne [Approfondissement]



Éléments du cours : Équation linéaire à solutions entières ; congruences ; paramétrage des solutions ; contraintes de positivité.

Indication / méthode : Trouver une solution particulière par congruence, puis écrire toutes les solutions à l'aide d'un paramètre entier. Terminer en imposant $x, y \geq 0$.

Formules / outils utiles : Si $d = \text{pgcd}(a, b)$ et $d | c$, alors $x = x_0 + (b/d)k$, $y = y_0 - (a/d)k$.

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $7x + 11y = 2026$. Puis compter le nombre de solutions.

Piste (à lire seulement après recherche) : Résoudre modulo 7 ou modulo 11 puis imposer la positivité.

Espace de travail :

Exercice 7. Congruences et puissances [Prépa]

Éléments du cours : Arithmétique modulaire ; cycles de puissances ; théorème d'Euler/Fermat ; divisibilité.

Indication / méthode : Réduire les puissances modulo le module dès que possible. Pour une divisibilité par un produit de nombres premiers entre eux, démontrer séparément la divisibilité par chaque facteur.

Formules / outils utiles : Si $\text{pgcd}(a, m) = 1$, $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$; $a^p \equiv a \pmod{p}$ pour p premier.

- 1) Calculer 7^{2026} modulo 100.
- 2) Déterminer les trois derniers chiffres de 3^{2026} .
- 3) Montrer que $n^5 - n$ est divisible par 30 pour tout entier n .

Piste (à lire seulement après recherche) : Utiliser des cycles, Euler ou le théorème chinois. Pour 3), traiter 2, 3, 5.

Espace de travail :

Exercice 8. Théorème chinois [Défi]

Éléments du cours : Systèmes de congruences ; théorème chinois ; modules premiers entre eux.

Indication / méthode : Combiner deux congruences à la fois : écrire x sous la forme correspondant à la première, injecter dans la seconde, puis poursuivre avec le module produit.

Formules / outils utiles : Si les modules m_i sont deux à deux premiers entre eux, le système admet une solution unique modulo $\prod m_i$.

Résoudre : $x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 2 \pmod{7}$.

Puis déterminer le plus petit entier positif vérifiant en plus $x \equiv 1 \pmod{4}$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Combiner deux congruences à la fois.

Espace de travail :

III. Matrices et récurrences

Exercice 9. Calcul matriciel [Consolidation]

Éléments du cours : Produit de matrices ; valeurs/vecteurs propres ; diagonalisation ; puissances de matrices.

Indication / méthode : Chercher des vecteurs propres simples avant de calculer le polynôme caractéristique. Une fois $A=PDP^{-1}$, les grandes puissances deviennent immédiates.

Formules / outils utiles : $A=PDP^{-1} \Rightarrow A^n=PD^nP^{-1}$.

Soit $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

- 1) Calculer A^2 et A^3 .
- 2) Trouver deux vecteurs propres simples.
- 3) Diagonaliser A .
- 4) En déduire A^n .

Piste (à lire seulement après recherche) : Tester les vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$.

Espace de travail :

Exercice 10. Récurrence matricielle [Approfondissement]

Éléments du cours : Récurrence linéaire ; matrice compagnon ; diagonalisation ; formule explicite.

Indication / méthode : Former le vecteur d'état $(u_{n+1}, u_n)^T$ et identifier la matrice qui le fait évoluer. Diagonaliser cette matrice ou utiliser ses valeurs propres.

Formules / outils utiles : $(u_{n+2}, u_{n+1})^T = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (u_{n+1}, u_n)^T$ pour $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$.

$u_{n+2}=4u_{n+1}-3u_n$, $u_0=1, u_1=2$.

- 1) Écrire une relation matricielle sur $(u_{n+1}, u_n)^T$.
- 2) Diagonaliser la matrice.
- 3) Retrouver une formule explicite pour u_n .

Piste (à lire seulement après recherche) : La matrice compagnon est $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Espace de travail :



Schema de probabilites ou arbre pondere

Exercice 11. Chaîne de Markov [Prépa]

Éléments du cours : Probabilités conditionnelles ; matrice de transition ; distribution stationnaire ; convergence.

Indication / méthode : Choisir une convention lignes ou colonnes et la conserver. Écrire d'abord la récurrence scalaire sur p_n , puis résoudre le point fixe avant d'étudier la convergence.

Formules / outils utiles : Distribution stationnaire $\pi : \pi P = \pi$ (convention ligne) et $\sum \pi_i = 1$.

Un système possède deux états A et B. À chaque étape, il reste en A avec probabilité 0,8 et passe de B à A avec probabilité 0,3.

- 1) Écrire la matrice de transition.
- 2) Si p_n est la probabilité d'être en A, établir une récurrence.
- 3) Déterminer la distribution stationnaire.
- 4) Étudier la convergence quelle que soit la distribution initiale.

Piste (à lire seulement après recherche) : Écrire $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,3(1-p_n)$.

Espace de travail :

Exercice 12. Commutation et polynômes de matrices [Défi]

Éléments du cours : Matrices commutantes ; binôme de Newton ; récurrence ; polynômes de matrices.

Indication / méthode : Identifier précisément où $AB=BA$ est utilisé dans les développements. Pour le contre-exemple, choisir deux petites matrices 2×2 non commutantes.

Formules / outils utiles : Si $AB=BA$, $(A+B)^n = \sum_{k=0}^n C(n,k) A^k B^{n-k}$.

Soient A et B deux matrices carrées de même taille telles que $AB=BA$.

- 1) Démontrer $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
- 2) Démontrer la formule du binôme pour $(A+B)^n$.
- 3) Donner un contre-exemple lorsque $AB \neq BA$.
- 4) Montrer que toute matrice commute avec tout polynôme en elle-même.

Piste (à lire seulement après recherche) : La preuve du binôme est la même que pour les nombres seulement grâce à la commutation.

Espace de travail :

IV. Graphes et structures

Exercice 13. Marches dans un graphe [Consolidation]

Éléments du cours : Graphe orienté ; matrice d'adjacence ; produit matriciel ; comptage de marches.

Indication / méthode : Relier chaque coefficient du produit matriciel à un choix d'étape intermédiaire. La récurrence sur la longueur des marches donne l'interprétation de A^n .

Formules / outils utiles : $(A^n)_{ij}$ = nombre de marches orientées de longueur n du sommet i vers le sommet j.

Un graphe orienté a pour matrice d'adjacence

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 1) Interpréter le graphe.
- 2) Calculer A^2 .
- 3) Combien existe-t-il de marches de longueur 2 de 1 vers 1 ? de 1 vers 2 ?
- 4) Généraliser l'interprétation de $(A^n)_{ij}$.

Piste (à lire seulement après recherche) : La matrice correspond au triangle complet sans boucles.

Espace de travail :

Exercice 14. Coloration et degré [Approfondissement]

Éléments du cours : Coloration des graphes ; degré maximal ; algorithme glouton ; cycles pairs et impairs.

Indication / méthode : Colorier les sommets l'un après l'autre : un sommet a au plus Δ voisins déjà colorés. Pour C_n , distinguer la parité de n .

Formules / outils utiles : $\chi(G) \leq \Delta + 1$ par coloration gloutonne ; $\chi(C_n) = 2$ si n pair et 3 si n impair ($n \geq 3$).

- 1) Montrer que tout graphe simple dont le degré maximal est Δ peut être colorié avec $\Delta + 1$ couleurs.
- 2) Appliquer au cycle C_n .
- 3) Déterminer le nombre chromatique d'un cycle selon la parité de n .

Piste (à lire seulement après recherche) : Colorier les sommets un à un ; au plus Δ couleurs sont interdites.

Espace de travail :

Exercice 15. Groupe des racines de l'unité [Prépa]

Éléments du cours : Racines n -ièmes de l'unité ; groupe multiplicatif ; cyclicité ; générateurs.

Indication / méthode : Écrire toutes les racines sous la forme ζ^k avec $\zeta = e^{2i\pi/n}$. Un élément ζ^k engendre tout le groupe exactement lorsque k est premier avec n .

Formules / outils utiles : $U_n = \{e^{2ik\pi/n} : k=0, \dots, n-1\}$; ordre de $\zeta^k = n/\text{pgcd}(k, n)$.

Soit $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$.

- 1) Montrer que U_n est stable par multiplication et inverse.
- 2) Montrer qu'il contient n éléments.
- 3) Montrer qu'il est engendré par $e^{2i\pi/n}$.
- 4) Déterminer les générateurs de U_n .

Piste (à lire seulement après recherche) : Les générateurs correspondent aux exposants premiers avec n .

Espace de travail :

Exercice 16. Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Défi]

Éléments du cours : Classes modulo n ; éléments inversibles ; congruences linéaires ; Bézout.

Indication / méthode : Tester l'inversibilité par le pgcd. Pour $ax \equiv b \pmod{n}$, commencer par $d = \text{pgcd}(a, n)$: si d ne divise pas b , aucune solution.

Formules / outils utiles : $[a]$ inversible modulo $n \Leftrightarrow \text{pgcd}(a, n) = 1$; $ax \equiv b \pmod{n}$ soluble $\Leftrightarrow \text{pgcd}(a, n) \mid b$.

- 1) Dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, déterminer les éléments inversibles.
- 2) Résoudre $5x \equiv 7 \pmod{12}$.
- 3) Résoudre $6x \equiv 8 \pmod{14}$.
- 4) Montrer que la classe de a modulo n est inversible si et seulement si $\text{pgcd}(a, n) = 1$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Utiliser Bézout pour la caractérisation.

Espace de travail :

Problèmes de synthèse

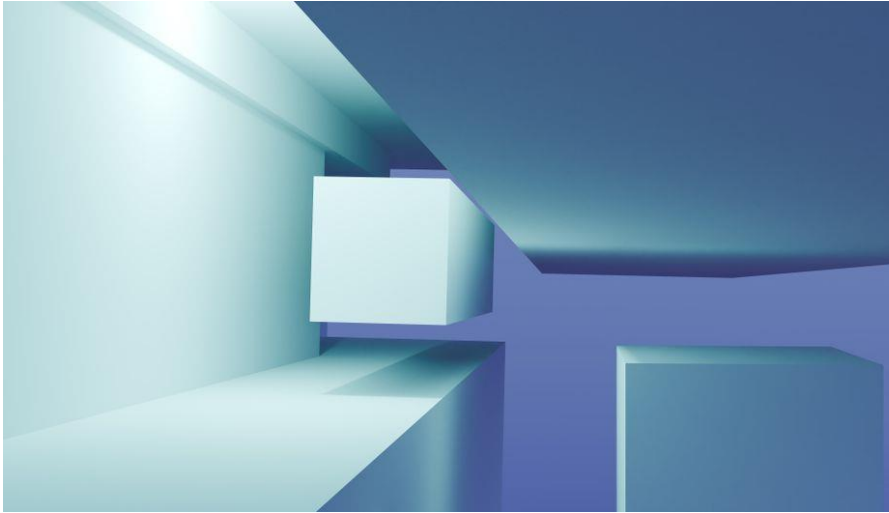


Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

Problème A — Entiers de Gauss

Éléments du cours : Anneau $\mathbb{Z}[i]$; norme complexe ; unités ; factorisation ; sommes de deux carrés.

Indication / méthode : Utiliser la norme comme analogue de la valeur absolue entière : elle transforme les produits en produits d'entiers positifs et limite fortement les possibilités de factorisation.

Formules / outils utiles : $N(a+ib)=a^2+b^2=z\cdot\bar{z}$; $N(zw)=N(z)N(w)$; unités $\Leftrightarrow N(z)=1$.

Niveau : Prépa renforcée

On considère $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib : a,b\in\mathbb{Z}\}$ et $N(a+ib)=a^2+b^2$.

- 1) Montrer $N(zw)=N(z)N(w)$.
- 2) Déterminer les unités de $\mathbb{Z}[i]$.
- 3) Montrer que $5=(2+i)(2-i)$.
- 4) Décomposer 13 et 17 dans $\mathbb{Z}[i]$.
- 5) Résoudre dans $\mathbb{Z}[i]$ l'équation $z\cdot\text{conj}(z)=25$.
- 6) Relier ce problème aux représentations d'un entier comme somme de deux carrés.

Piste globale : Les unités ont une norme égale à 1. Pour 5), chercher $a^2+b^2=25$.

.....

Problème B — Codage matriciel et graphe



Éléments du cours : Chaîne de Markov sur un cycle ; matrice circulante ; vecteurs propres ; distribution stationnaire ; spectre.

Indication / méthode : Exploiter la symétrie du cycle pour proposer des vecteurs propres très simples (uniforme, alterné, motifs opposés). La vitesse de convergence dépend de la deuxième plus grande valeur propre en module.

Formules / outils utiles : $\pi P = \pi$; si P est diagonalisable, $P^n = P D^n P^{-1}$ et les valeurs propres de module < 1 gouvernent la décroissance des transitoires.

Niveau : Très exigeant

Un réseau possède quatre stations disposées en cycle. À chaque étape, un mobile reste sur place avec probabilité $1/2$ et se déplace vers chacun des deux voisins avec probabilité $1/4$.

- 1) Écrire la matrice de transition.
- 2) Montrer que la loi uniforme est stationnaire.
- 3) Trouver quatre vecteurs propres réels simples.
- 4) Calculer la loi après n étapes si le mobile part de la station 1.
- 5) Montrer la convergence vers la loi uniforme et déterminer la vitesse principale.

Piste globale : Utiliser les symétries du cycle et les vecteurs $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 1, 0, -1)$, $(1, -1, 1, -1)$.

.....

.....

.....

Corrigés et éléments de solution

Les corrigés privilégient les idées, les étapes décisives et les contrôles. Une rédaction personnelle complète reste indispensable.



Exercice 1. Formes algébrique et trigonométrique

- $1+i=\sqrt{2} e^{i\pi/4}$, puissance $=16e^{i2\pi}=16$.
- module 2, argument $-\pi/3$, puissance $64e^{-i2\pi}=64$.
- multiplier par $1+2i$: $(5i)/5=i$.
- i .

Exercice 2. Racines n-ièmes

- $z=2e^{ik\pi/3}$, $k=0,\dots,5$.
- $z=2e^{i(\pi/4+k\pi/2)}$, $k=0,\dots,3$.
- Somme opposée au coefficient de X^{n-1} , donc 0.
- Par les formules de Viète appliquées à X^n-1 , le produit des n racines vaut $(-1)^n \times (-$

$1)=(-1)^{n+1}$.

Exercice 3. Géométrie complexe

- Médiatrice de $[AB]$.
- Cercle de diamètre $[AB]$, privé de A et B .
- $|z-1|=2|z+1|$. En posant $z=x+iy$: $(x-1)^2+y^2=4[(x+1)^2+y^2]$, soit $(x+5/3)^2+y^2=(4/3)^2$.
- Arc de cercle passant par -1 et 1 sous lequel le segment est vu sous l'angle $\pi/3$; deux arcs selon l'orientation modulo π .

Exercice 4. Transformation homographique

$z=(1+w)/(1-w)$. Si $z=iy$, $|iy-1|=|iy+1|$, donc $|w|=1$, avec $w \neq 1$. Pour $\operatorname{Re}(z)>0$, $|z-1|<|z+1|$, donc $|w|<1$. La transformation envoie un demi-plan sur le disque unité et les droites/cercle généralisés sur des droites/cercle généralisés.

Exercice 5. Algorithme d'Euclide

$252=198+54$, $198=3 \times 54+36$, $54=36+18$. Donc $\operatorname{pgcd}=18$. Remontée : $18=54-36=54-(198-3 \times 54)=4 \times 54-198=4 \times 252-5 \times 198$. Une solution est $(4,-5)$. Toutes : $x=4+11k$, $y=-5-14k$.

Exercice 6. Équation diophantienne

Modulo 7 : $4y \equiv 3$, donc $y \equiv 6$ modulo 7. Poser $y=6+7k$. Alors $x=(2026-66-77k)/7=280-11k$. Conditions $x,y \geq 0$: $k \geq 0$ et $k \leq 25$. Il y a 26 solutions.

Exercice 7. Congruences et puissances

- $7^4 \equiv 1 \pmod{100}$, donc $2026 \equiv 2 \pmod{4}$ et $7^{2026} \equiv 49$.
- Modulo 8, $3^{2026} \equiv 1$. Modulo 125, $\varphi=100$ et $2026 \equiv 26$. Calcul rapide : $3^{10} \equiv 49$, $3^{20} \equiv 26$, $3^{26} \equiv 26 \times 729 \equiv 26 \times 104 \equiv 79 \pmod{125}$. Résoudre $x \equiv 1 \pmod{8}$, $x \equiv 79 \pmod{125}$: $x=329$.
- $n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$, divisible par 2 et 3 via trois entiers consécutifs ; modulo 5, Fermat donne $n^5 \equiv n$.

Exercice 8. Théorème chinois

Les trois premières donnent $x \equiv 23 \pmod{105}$. Poser $x=23+105k$. Modulo 4 : $3+k \equiv 1$, donc $k \equiv 2 \pmod{4}$. Plus petit $k=2$, d'où $x=233$. Solution générale modulo 420 : $x \equiv 233$.

Exercice 9. Calcul matriciel

Valeurs propres 3 et 1, vecteurs correspondants $(1,1)$, $(1,-1)$. Avec $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A=P \operatorname{diag}(3,1) P^{-1}$. Donc $A^n=1/2[[3^n+1, 3^n-1], [3^n-1, 3^n+1]]$.

Exercice 10. Récurrence matricielle

Ses valeurs propres sont 1 et 3. La solution générale est $A+B3^n$. Avec $u_0=1, u_1=2$: $A+B=1$, $A+3B=2$, donc $B=1/2, A=1/2$. $u_n=(1+3^n)/2$.

Exercice 11. Chaîne de Markov

$P=\begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$ si les colonnes sont les états de départ. $p_{n+1}=0,5p_n+0,3$. Le point fixe est 0,6 et $p_n=0,6+(p_0-0,6)0,5^n$. Distribution stationnaire $(0,6;0,4)$.

Exercice 12. Commutation et polynômes de matrices

1-2) Développement puis regroupement des termes, ou récurrence.

3) Par exemple $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Alors $AB \neq BA$ et $(A+B)^2 = I$ tandis que $A^2 + 2AB + B^2 = 2AB \neq I$.

4) A commute avec chacune de ses puissances, donc avec toute combinaison linéaire de celles-ci.

Exercice 13. Marches dans un graphe

$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Les coefficients donnent respectivement 2 et 1. En général, $(A^n)_{ij}$ compte les marches orientées de longueur n de i vers j .

Exercice 14. Coloration et degré

La procédure gloutonne donne $\Delta+1$ couleurs. Pour un cycle, $\Delta=2$ donc 3 couleurs suffisent. Si n est pair, 2 couleurs suffisent; si n est impair, 3 sont nécessaires.

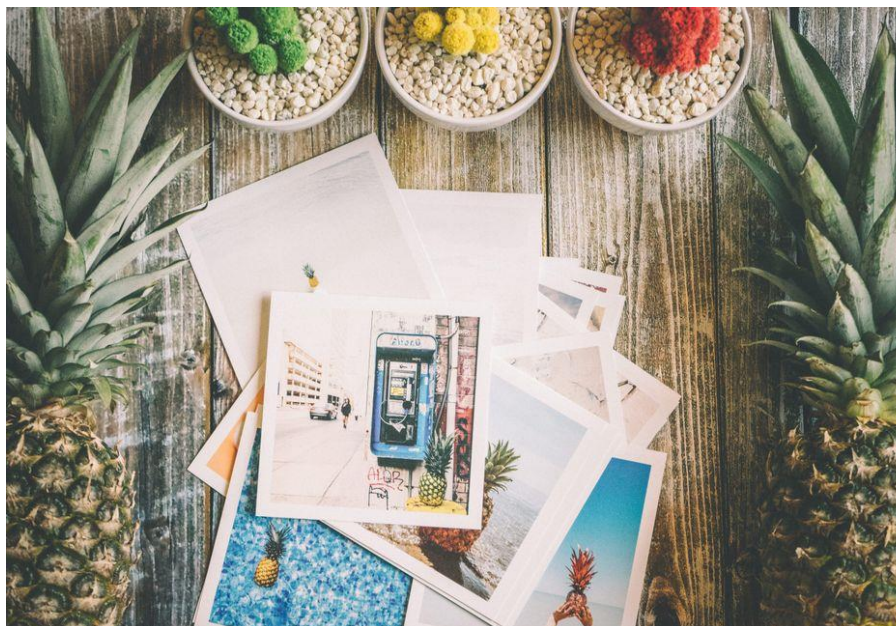


Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

Exercice 15. Groupe des racines de l'unité

$U_n = \{\omega^k, 0 \leq k < n\}$, $\omega = e^{2i\pi/n}$. C'est un groupe cyclique. L'élément ω^k engendre U_n si et seulement si $\text{pgcd}(k, n) = 1$.

Exercice 16. Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Les inversibles modulo 12 sont 1, 5, 7, 11. Comme $5^{-1} \equiv 5$, $x \equiv 35 \equiv 11 \pmod{12}$. Pour $6x \equiv 8 \pmod{14}$, diviser par 2 : $3x \equiv 4 \pmod{7}$, donc $x \equiv 6 \pmod{7}$, soit $x \equiv 6$ ou $13 \pmod{14}$. La caractérisation découle de $ax + ny = 1$.

Corrigés des problèmes

Problème A — Entiers de Gauss

- 1) Calcul direct ou modules complexes.
- 2) $\pm 1, \pm i$.
- 3) Immédiat.
- 4) $13 = (3+2i)(3-2i)$, $17 = (4+i)(4-i)$.
- 5) Couples entiers (a,b) avec $a^2+b^2=25$: $(\pm 5, 0), (0, \pm 5), (\pm 3, \pm 4), (\pm 4, \pm 3)$, soit 12 solutions.
- 6) La factorisation dans $\mathbb{Z}[i]$ explique structurellement les sommes de deux carrés.

Problème B — Codage matriciel et graphe

Les valeurs propres associées sont $1, 1/2, 1/2, 0$. La décomposition du vecteur initial dans cette base donne une expression explicite ; tous les termes non uniformes sont multipliés par $(1/2)^n$ ou 0^n . La convergence est donc géométrique de raison $1/2$.

Bilan personnel

Compétence	Acquis	À reprendre
Calcul exact et transformations algébriques	☐	☐
Choix d'une méthode	☐	☐
Usage correct des théorèmes	☐	☐
Rédaction d'une preuve	☐	☐
Contrôle de cohérence	☐	☐
Autonomie sur un problème long	☐	☐

Sources d'inspiration pédagogique

Repères utilisés pour concevoir la collection : programmes officiels de Première, Terminale spécialité et Mathématiques expertes ; programmes et commentaires de Terminale C du début des années 1970 ; cahiers et devoirs de Terminale C 1974-1975 ; annales du baccalauréat C 1974-1975. Les énoncés et corrigés de cette collection sont des créations originales.

Fin du cahier. Refaire les exercices marqués « Prépa » ou « Défi » une semaine plus tard.