

CAHIER 3

Analyse rigoureuse

Limites, continuité, dérivation, convexité et approximations

*Cahiers de vacances — passage en L1
Niveau très exigeant, esprit prépa et ancienne série C*



Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

Objectif : autonomie, rigueur, culture mathématique et préparation aux raisonnements universitaires.

Présentation du cahier

Cette collection prépare un étudiant entrant en L1 scientifique, économique ou de gestion quantitative. Elle reprend les grands contenus de Première, Terminale spécialité et Mathématiques expertes, mais avec une exigence de démonstration, de calcul et d'autonomie inspirée de l'ancienne série C. Les exercices sont originaux et progressent de la consolidation vers des problèmes de niveau prépa.

Objectifs

- Passer des recettes de calcul aux définitions et aux preuves.
- Maîtriser les théorèmes de continuité et de dérivation.
- Utiliser convexité, accroissements finis et développements limités.
- Préparer les méthodes d'analyse de L1 et de classe préparatoire.

Méthode de travail

1. Travailler sans calculatrice pendant la première tentative.
2. Rédiger les quantificateurs, les hypothèses et les conclusions.
3. Chercher au moins vingt minutes avant de lire une piste.
4. Reprendre l'exercice deux jours plus tard sans regarder la correction.
5. Tenir un carnet des erreurs : calcul, logique, méthode, rédaction.

Barème conseillé

Niveau	Temps indicatif	Attendu
Consolidation	10 à 20 min	Calcul exact et rédaction propre
Approfondissement	20 à 35 min	Choix de méthode et justification
Prépa	35 à 60 min	Démonstration structurée
Défi / très exigeant	60 à 90 min	Autonomie et synthèse

Conseil : masquer les corrigés pendant la première semaine de travail.

I. Limites et encadrements

Exercice 1. Preuve epsilon [Consolidation]

Éléments du cours : Définition ε - η d'une limite ; valeur absolue ; estimation directe.

Indication / méthode : Partir de $|f(x) - L|$ et le réécrire comme un multiple de $|x - a|$. Choisir ensuite η en fonction de ε de façon à garantir l'inégalité demandée.

Formules / outils utiles : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Démontrer directement à partir de la définition que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$. Puis déterminer, pour $\varepsilon > 0$, une valeur explicite de η telle que $|x - 2| < \eta$ entraîne $|3x - 1 - 5| < \varepsilon$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Factoriser la différence.

Espace de travail :

Exercice 2. Limite rationnelle délicate [Approfondissement]

Éléments du cours : Limites ; rationalisation ; encadrement ; continuité de la racine carrée.

Indication / méthode : Multiplier numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée, puis isoler un facteur qui tend vers une constante. Pour la preuve sans DL, encadrer le dénominateur obtenu.

Formules / outils utiles : $(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}]/x$, puis donner une preuve par encadrement sans développement limité.

Piste (à lire seulement après recherche) : Rationaliser le numérateur.

Espace de travail :

Exercice 3. Suites et équivalents [Prépa]

Éléments du cours : Équivalents ; développements asymptotiques élémentaires ; logarithme ; comparaison somme-intégrale.

Indication / méthode : Transformer chaque expression pour faire apparaître un petit paramètre $1/n$. Pour une somme monotone, comparer avec des intégrales sur des intervalles voisins.

Formules / outils utiles : $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + o(x)$; $\ln(1+x) = x + o(x)$; $\sum f(k)$ se compare à $\int f$ lorsque f est positive monotone.

Déterminer un équivalent de

- a) $\sqrt{n^2 + n} - n$;
- b) $\ln(n+1) - \ln n$;
- c) $(1 + 1/n)^n - e$;
- d) $\sum_{k=1}^n 1/\sqrt{k}$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Pour d), comparer somme et intégrale. Pour c), utiliser un développement de $\ln(1+1/n)$.

Espace de travail :

Exercice 4. Produit infini élémentaire [Défi]

Éléments du cours : Produits télescopiques ; factorisation ; comportement d'un produit ; logarithme d'un produit.

Indication / méthode : Factoriser chaque terme en quotient de facteurs consécutifs et simplifier le produit. Pour la discussion générale, penser à prendre le logarithme du produit.

Formules / outils utiles : $1 - 1/k^2 = (k-1)(k+1)/k^2$; $\ln(\prod a_k) = \sum \ln(a_k)$ lorsque les termes sont positifs.

Soit $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + 1/k)$.

- 1) Calculer u_n exactement.
- 2) Étudier $v_n = \prod_{k=2}^n (1 - 1/k^2)$.
- 3) Expliquer pourquoi un produit de facteurs tendant vers 1 peut converger vers 0, vers une constante non nulle ou diverger.

Piste (à lire seulement après recherche) : Factoriser chaque facteur en quotient de termes consécutifs.

Espace de travail :

II. Continuité et théorèmes d'existence

Exercice 5. Valeurs intermédiaires [Consolidation]

Éléments du cours : Continuité ; théorème des valeurs intermédiaires ; stricte monotonie ; encadrement numérique.

Indication / méthode : Montrer d'abord que la fonction est continue et strictement monotone, puis trouver deux valeurs de signes opposés. Affiner ensuite l'encadrement par dichotomie.

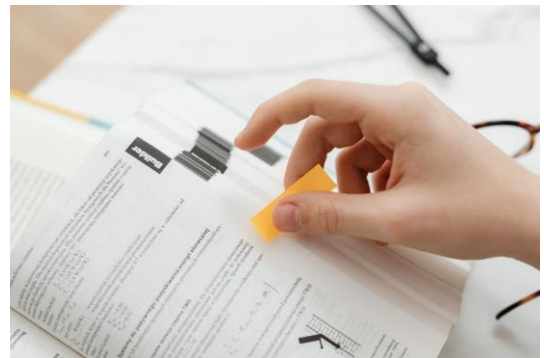
Formules / outils utiles : TVI : si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a)f(b) \leq 0$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Montrer que l'équation $x^5 + x - 1 = 0$ admet une unique solution réelle α . Donner un encadrement de largeur 10^{-2} .

Piste (à lire seulement après recherche) : Étudier la monotonie et calculer quelques valeurs décimales simples.

Espace de travail :

Exercice 6. Point fixe et contraction [Approfondissement]



Éléments du cours : Point fixe ; contraction ; théorème des accroissements finis ; convergence d'une suite itérée.

Indication / méthode : Montrer que f conserve $[0, 1]$, puis majorer $|f'|$ par une constante $q < 1$. L'erreur se propage alors géométriquement.

Formules / outils utiles : $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ avec $q < 1 \Rightarrow |u_n - \alpha| \leq q^n |u_0 - \alpha|$.

Soit $f(x) = \cos x$ sur $[0, 1]$.

- 1) Montrer que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.
- 2) Montrer que f possède un unique point fixe α .
- 3) Pour $u_{n+1} = \cos u_n$, montrer $|u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n |u_0 - \alpha|$.
- 4) Estimer le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir 10^{-8} de précision.

Piste (à lire seulement après recherche) : Utiliser le théorème des accroissements finis.

Espace de travail :

Exercice 7. Continuité uniforme [Prépa]

Éléments du cours : Continuité uniforme ; suites-test ; théorème de Heine-Cantor sur un segment ; inégalités de racines.

Indication / méthode : Pour montrer l'échec de la continuité uniforme, chercher $x_n - y_n \rightarrow 0$ mais $|f(x_n) - f(y_n)|$ non nul. Sur un segment, invoquer Heine-Cantor.

Formules / outils utiles : $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = |x - y| / (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \leq \sqrt{|x - y|}$ pour $x, y \geq 0$.

- 1) Montrer que $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer qu'elle est uniformément continue sur tout segment.
- 3) Montrer que $\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty)$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Pour 1), choisir deux suites de points de plus en plus proches mais dont les images restent séparées. Pour 3), utiliser $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.

Espace de travail :

Exercice 8. Théorème de Bolzano-Weierstrass [Défi]

Éléments du cours : Sous-suites ; valeurs d'adhérence ; compacité séquentielle ; raisonnement par l'absurde.

Indication / méthode : Pour l'unicité de la valeur d'adhérence, supposer que la suite ne converge pas et extraire une sous-suite restant à distance fixe. Pour construire des exemples, organiser explicitement les termes par blocs.

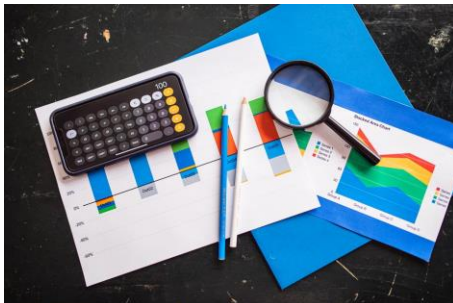
Formules / outils utiles : Une valeur d'adhérence ℓ est la limite d'au moins une sous-suite u_{n_k} .

On admet que toute suite bornée de réels possède une sous-suite convergente.

- 1) Montrer que si une suite bornée possède une seule valeur d'adhérence ℓ , alors elle converge vers ℓ .
- 2) Construire une suite bornée ayant exactement deux valeurs d'adhérence.
- 3) Construire une suite dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $[0, 1]$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Pour 1), raisonner par l'absurde. Pour 3), énumérer les rationnels de $[0, 1]$ avec répétitions contrôlées.

Espace de travail :



III. Dérivation, convexité, inégalités

Exercice 9. Dérivée par définition [Consolidation]

Éléments du cours : Nombre dérivé ; taux d'accroissement ; quotient ; rationalisation.

Indication / méthode : Écrire $[f(a+h) - f(a)]/h$ et simplifier avant de passer à la limite. Pour la racine, multiplier par le conjugué.

Formules / outils utiles : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)]/h$.

À partir de la définition, calculer la dérivée de $f(x) = 1/x$ en $a \neq 0$ puis celle de $g(x) = \sqrt{x}$ en $a > 0$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Factoriser $f(a+h) - f(a)$ et rationaliser pour g .

Espace de travail :

Exercice 10. Accroissements finis [Approfondissement]

Éléments du cours : Théorème des accroissements finis ; encadrement d'une dérivée ; logarithme ; fonction sinus.

Indication / méthode : Appliquer le TAF sur un intervalle adapté, puis encadrer la dérivée. Pour les inégalités en $\ln(1+x)$, comparer directement des fonctions dont le signe de la dérivée est simple.

Formules / outils utiles : $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ pour un $c \in]a,b[$; si $|f'| \leq M$, alors $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$.

Démontrer pour $x > -1$:

- a) $\ln(1+x) \leq x$;
- b) si $x \geq 0$, $x/(1+x) \leq \ln(1+x) \leq x$;
- c) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Appliquer le théorème des accroissements finis aux fonctions appropriées.

Espace de travail :

Exercice 11. Convexité et tangentes [Prépa]

Éléments du cours : Convexité et concavité ; position par rapport aux tangentes ; inégalité de Jensen ; moyenne arithmético-géométrique.

Indication / méthode : Identifier la convexité par le signe de f'' . Une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes ; une fonction concave est en dessous.

Formules / outils utiles : f convexe $\Rightarrow f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$; Jensen : $f(\sum \lambda_i x_i) \leq \sum \lambda_i f(x_i)$ pour une fonction convexe.

- 1) Montrer $e^x \geq 1+x$ pour tout réel x .
- 2) Montrer $\ln x \leq x-1$ pour $x > 0$.
- 3) Montrer, pour $a_i > 0$ et $\lambda_i \geq 0$ de somme 1, $\ln(\sum \lambda_i a_i) \geq \sum \lambda_i \ln a_i$.
- 4) En déduire l'inégalité arithmético-géométrique pondérée.

Piste (à lire seulement après recherche) : La fonction exponentielle est convexe et le logarithme est concave.

Espace de travail :

Exercice 12. Une inégalité de type Cauchy [Défi]

Éléments du cours : Étude de fonction auxiliaire ; dérivation ; logarithme ; symétrie $x \leftrightarrow 1/x$.

Indication / méthode : Former la différence entre les deux membres, calculer sa dérivée et repérer le point $x=1$. Traiter séparément $x \geq 1$ et $0 < x \leq 1$ ou utiliser le changement $x \mapsto 1/x$.

Formules / outils utiles : $d/dx[\ln x] = 1/x$; $d/dx[x - 1/x - 2\ln x]$ permet d'étudier le signe.

Pour $x > 0$, montrer

$x - 1/x \geq 2\ln x$ si $x \geq 1$, et l'inégalité inverse si $0 < x \leq 1$.

Puis montrer $|\ln x| \leq |x - 1/x|/2$ pour tout $x > 0$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Étudier $\varphi(x) = x - 1/x - 2\ln x$.

Espace de travail :

IV. Développements limités et méthodes numériques**Exercice 13. Développements usuels [Consolidation]**

Éléments du cours : Développements limités de référence ; formule de Taylor ; petit o .

Indication / méthode : Mémoriser les séries usuelles puis tronquer exactement à l'ordre demandé, sans conserver de termes inutiles.

Formules / outils utiles : $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + o(x^4)$; $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + o(x^4)$; $\sin x = x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5)$.

Donner les développements limités en 0 à l'ordre demandé :

- a) e^x à l'ordre 4 ; b) $\ln(1+x)$ à l'ordre 4 ; c) $\sin x$ à l'ordre 5 ; d) $(1+x)^a$ à l'ordre 3.

Piste (à lire seulement après recherche) : Écrire les coefficients généraux puis tronquer.

Espace de travail :

Exercice 14. Calcul de limites par DL [Approfondissement]

Éléments du cours : Développements limités ; composition ; quotient de deux infiniment petits ; premier terme non nul.

Indication / méthode : Développer chaque fonction juste assez loin pour obtenir le premier coefficient non nul au numérateur, puis simplifier par la puissance de x du dénominateur.

Formules / outils utiles : Principe : si $f(x) = a_p x^p + o(x^p)$ avec $a_p \neq 0$, alors $f(x)/x^p \rightarrow a_p$.

Calculer :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x)/x^2$;
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1+x) - x + x^2/2)/x^3$;
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - x \cos x)/x^3$;
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} [(1+x)^{1/x} - e]/x$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Développer jusqu'au premier terme non nul.

Espace de travail :

Exercice 15. Méthode de Newton [Prépa]

Éléments du cours : Méthode de Newton ; suites ; tangente ; convergence quadratique ; erreur.

Indication / méthode : Écrire l'itération générale, puis étudier l'intervalle invariant et la monotonie. Pour l'erreur, développer f au voisinage de la racine ou utiliser Taylor à l'ordre 2.

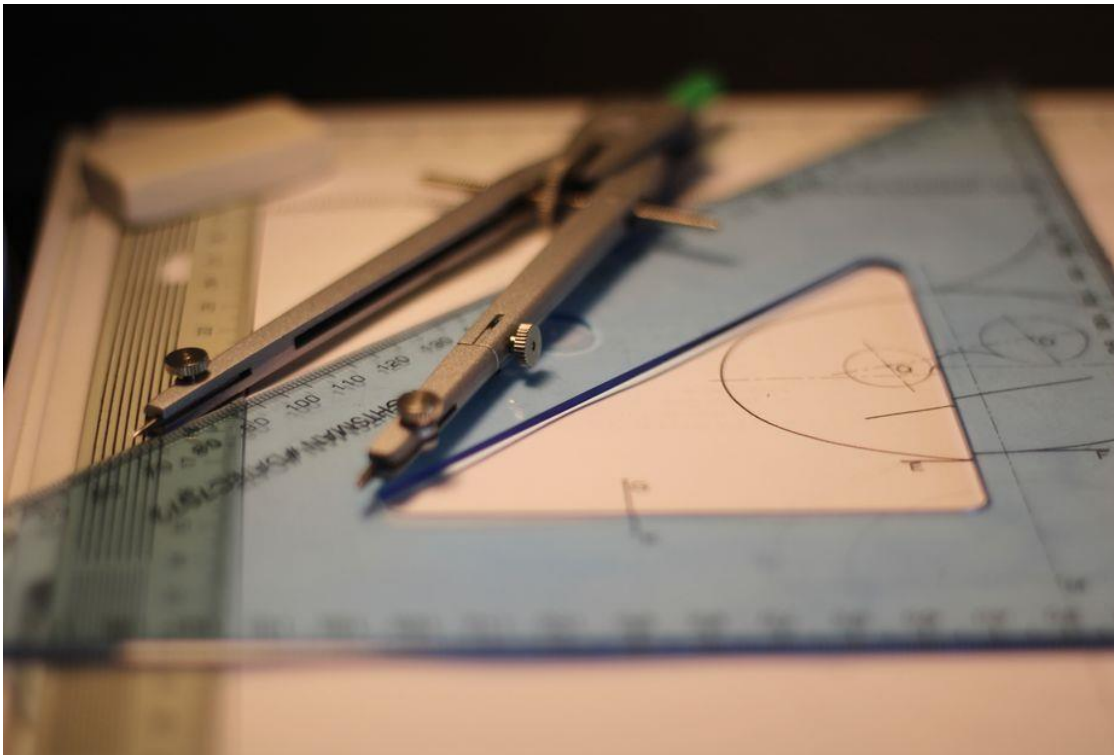
Formules / outils utiles : $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$; près d'une racine simple α , $e_{n+1} \approx [f''(\alpha)/(2f'(\alpha))]e_n^2$.

On veut résoudre $x^3 - 2 = 0$.

- 1) Écrire l'itération de Newton.
- 2) Montrer que si $x_0 > \sqrt[3]{2}$, la suite est décroissante et minorée par $\sqrt[3]{2}$.
- 3) Montrer la convergence.
- 4) Établir une relation quadratique approchée entre les erreurs e_{n+1} et e_n .

Piste (à lire seulement après recherche) : L'itération est $x_{n+1} = (2x_n + 2/x_n^2)/3$.

Espace de travail :



Exercice 16. Approximation de π par une intégrale [Défi]

Éléments du cours : Intégrale de Riemann ; sommes de rectangles ; monotonie ; trapèzes ; estimation d'erreur.

Indication / méthode : Sur chaque sous-intervalle, utiliser la monotonie pour encadrer l'aire par rectangles. Pour améliorer l'erreur, exploiter la régularité et la convexité de l'intégrande.

Formules / outils utiles : Pour un pas $h=1/n$: sommes gauche/droite encadrent l'intégrale d'une fonction monotone ; méthode des trapèzes : $h[(f_0+f_n)/2+\sum f_k]$.

On admet $\pi=4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

- 1) Encadrer l'intégrale par les sommes de rectangles gauche et droite avec n subdivisions.
- 2) Montrer que l'erreur est au plus $4/n$.
- 3) Améliorer l'ordre de l'erreur en utilisant la méthode des trapèzes et la convexité sur des sous-intervalles adaptés.

Piste (à lire seulement après recherche) : *La fonction est décroissante sur $[0,1]$.*

Espace de travail :

.....

Problèmes de synthèse

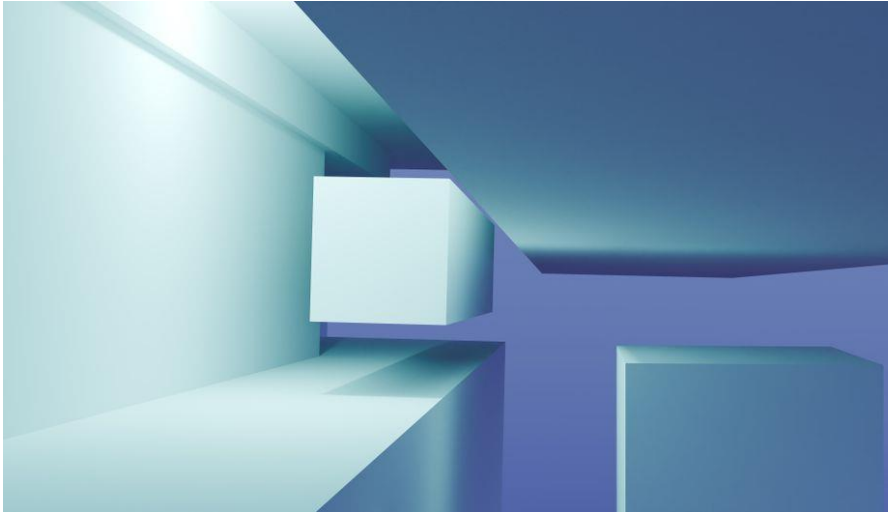


Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

Problème A — Le nombre e par les suites

Éléments du cours : Suites adjacentes ; logarithme ; intégrales ; inégalités ; développements asymptotiques.

Indication / méthode : Travailler sur les logarithmes des suites afin de transformer les puissances en produits. Les inégalités classiques sur $\ln(1+x)$ permettent d'obtenir la monotonie et l'encadrement.

Formules / outils utiles : $x/(1+x) \leq \ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$; $\ln(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$.

Niveau : Prépa renforcée

On pose $a_n = (1 + 1/n)^n$ et $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$.

- 1) Montrer que $\ln a_n = n \ln(1 + 1/n)$.
- 2) À l'aide d'intégrales ou d'inégalités logarithmiques, montrer que (a_n) est croissante et (b_n) décroissante.
- 3) Montrer $a_n \leq b_n$ et $b_n - a_n \rightarrow 0$.
- 4) En déduire qu'elles ont une limite commune e .
- 5) Obtenir un développement à l'ordre $1/n$ de a_n et b_n .

Piste globale : Comparer $\ln(1+x)$ à x et $x/(1+x)$. Pour la monotonie, étudier une fonction continue associée.

.....

.....

.....

Problème B — Une famille de fonctions

Éléments du cours : Étude paramétrée ; dérivée ; convexité ; nombre de solutions ; asymptotique implicite.

Indication / méthode : Étudier f_a' puis f_a'' , repérer le minimum, et utiliser la forme de la courbe pour discuter le nombre de solutions. Pour la grande solution, réinjecter un premier équivalent dans le logarithme.

Formules / outils utiles : $f_a'(x) = 1 - a/x$; $f_a''(x) = a/x^2$; une équation $x - a \ln x = m$ peut être raffinée par substitutions successives.

Niveau : Très exigeant

Pour $a > 0$, $f_a(x) = x - a \ln x$ sur $]0, +\infty)$.

- 1) Étudier variations et convexité.
- 2) Déterminer le minimum et son point d'atteinte.
- 3) Discuter selon m le nombre de solutions de $f_a(x) = m$.
- 4) Pour $m > a - a \ln a$, noter $x_-(m) < a < x_+(m)$ les solutions. Étudier leurs comportements lorsque $m \rightarrow +\infty$.
- 5) Montrer $x_+(m) = m + a \ln m + o(\ln m)$.

Piste globale : La dérivée vaut $1 - a/x$. Pour l'asymptotique de la grande racine, utiliser l'équation $x = m + a \ln x$.

.....

Corrigés et éléments de solution

Les corrigés privilégient les idées, les étapes décisives et les contrôles. Une rédaction personnelle complète reste indispensable.

Exercice 1. Preuve epsilon

$|3x-1-5|=3|x-2|$. Il suffit de prendre $\eta=\varepsilon/3$.

Exercice 2. Limite rationnelle délicate

L'expression vaut $2/[\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}]$, donc la limite est 1. L'encadrement vient de la continuité des racines ou de bornes proches de 1.

Exercice 3. Suites et équivalents

a) $[n]/[\sqrt{(n^2+n)+n}] \sim 1/2$.

b) $\ln(1+1/n) \sim 1/n$.

c) $n \ln(1+1/n) = 1 - 1/(2n) + O(1/n^2)$, donc $(1+1/n)^n = e[1 - 1/(2n) + O(1/n^2)]$ et la différence est équivalente à $-e/(2n)$.

d) Par comparaison intégrale, la somme est équivalente à $2\sqrt{n}$.

Exercice 4. Produit infini élémentaire

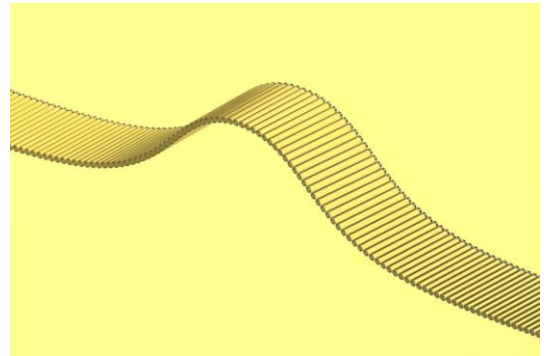
$u_n = n+1$. Pour v_n , $1-1/k^2 = (k-1)(k+1)/k^2$, d'où $v_n = (1/2)(n+1)/n \rightarrow 1/2$. Selon la somme des logarithmes des facteurs, les trois comportements sont possibles.

Exercice 5. Valeurs intermédiaires

$f(x) = 5x^4 + 1 > 0$, donc unicité. $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, donc existence. $f(0,75) \approx -0,0127$ et $f(0,76) \approx 0,0136$, donc $\alpha \in]0,75, 0,76[$.

Exercice 6. Point fixe et contraction

$f([0,1]) = [\cos 1, 1] \subset [0,1]$. La fonction $g(x) = \cos x - x$ est strictement décroissante et change de signe. Par accroissements finis, $|\cos x - \cos y| \leq \sin 1 |x-y|$ sur $[0,1]$. Donc l'erreur est géométriquement majorée. Il faut n tel que $(\sin 1)^n |u_0 - \alpha| \leq 10^{-8}$; avec $|u_0 - \alpha| \leq 1$, $n \geq \ln(10^{-8})/\ln(\sin 1)$, soit environ 107.



Exercice 7. Continuité uniforme

1) $x_n = n$, $y_n = n+1/n$: $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ mais $|x_n^2 - y_n^2| = 2 + 1/n^2 \rightarrow 2$.

2) Sur $[-M, M]$, $|x^2 - y^2| \leq 2M|x-y|$.

3) Supposons $x \geq y$. Alors $\sqrt{x} - \sqrt{y} = (x-y)/(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \leq \sqrt{x-y}$. Donc $\delta = \varepsilon^2$ convient.

Exercice 8. Théorème de Bolzano-Weierstrass

1) Sinon, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite restant hors de $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. Cette sous-suite bornée possède une sous-suite convergente vers une autre valeur d'adhérence, contradiction.

2) $u_n = (-1)^n$.

3) Une construction consiste à parcourir successivement les grilles $\{k/m : 0 \leq k \leq m\}$ pour $m=1, 2, \dots$; chaque point de $[0,1]$ est limite d'une sous-suite.

Exercice 9. Dérivée par définition

$[1/(a+h) - 1/a]/h = -1/[a(a+h)] \rightarrow -1/a^2$. Pour $\sqrt{x}$: $[\sqrt{a+h} - \sqrt{a}]/h = 1/[\sqrt{a+h} + \sqrt{a}] \rightarrow 1/(2\sqrt{a})$.

Exercice 10. Accroissements finis

a) Étudier $x - \ln(1+x)$, dérivée $x/(1+x)$ de signe de x .

b) La borne inférieure revient à étudier $\ln(1+x) - x/(1+x)$, de dérivée $x/(1+x)^2 \geq 0$.

c) Par TAF, différence $= \cos(x-y)$, donc valeur absolue $\leq |x-y|$.

Exercice 11. Convexité et tangentes

Les deux premières inégalités sont celles de la tangente au point 0 pour $\exp$ et au point 1 pour $\ln$. La concavité de $\ln$ donne Jensen. En exponentiant : $\sum \lambda_i a_i \geq \prod a_i^{\lambda_i}$.

Exercice 12. Une inégalité de type Cauchy

$\varphi'(x) = 1 + 1/x^2 - 2/x = (x-1)^2/x^2 \geq 0$ et $\varphi(1) = 0$. Donc $\varphi \leq 0$ avant 1 et ≥ 0 après 1. La formulation absolue en découle.

Exercice 13. Développements usuels

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + o(x^4).$$

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + o(x^4).$$

$$\sin x = x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)x^2/2 + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3/6 + o(x^3).$$

Exercice 14. Calcul de limites par DL

a) $1/2$. b) $1/3$. c) $\sin x - x \cos x = (x - x^3/6) - x(1 - x^2/2) + o(x^3) = x^3/3 + o(x^3)$, limite $1/3$. d) $(1/x)\ln(1+x) = 1 - x/2 + x^2/3 + \dots$, donc $(1+x)^{1/x} = e[1 - x/2 + o(x)]$, limite $-e/2$.

Exercice 15. Méthode de Newton

Pour $x > \alpha = \sqrt[3]{2}$, la tangente à la fonction convexe $x^3 - 2$ coupe l'axe entre α et x . Donc $\alpha < x_{n+1} < x_n$. La suite converge vers un point fixe, nécessairement α . Par Taylor, $e_{n+1} \approx [f''(\alpha)/(2f'(\alpha))]e_n^2 = e_n^2/\alpha$.

Exercice 16. Approximation de π par une intégrale

Les sommes de droite et de gauche encadrent l'intégrale, et leur différence vaut $(1/n)[f(0) - f(1)] = 1/(2n)$, donc après multiplication par 4, largeur $2/n$, meilleure que $4/n$. La méthode des trapèzes a une erreur globale en $O(1/n^2)$ lorsque f' est bornée ; ici elle l'est sur $[0, 1]$.

Corrigés des problèmes**Problème A — Le nombre e par les suites**

Représentation graphique de la fonction étudiée

Les encadrements $x/(1+x) \leq \ln(1+x) \leq x$ conduisent aux bornes et au rapprochement. Une preuve standard de monotonie passe par la convexité de $t \mapsto \ln t$ ou l'étude de $x \ln(1+1/x)$. Les développements donnent $a_n = e(1 - 1/(2n) + O(1/n^2))$ et $b_n = e(1 + 1/(2n) + O(1/n^2))$.

Problème B — Une famille de fonctions

$f_a = (x-a)/x$, donc minimum en a , de valeur $a - a \ln a$. La fonction est strictement convexe car $f'' = a/x^2 > 0$. Il y a 0, 1 ou 2 solutions selon m par rapport au minimum. Lorsque $m \rightarrow \infty$, $x_-(m) \rightarrow 0$ et $x_+(m) \rightarrow \infty$. Comme $x_+/m \rightarrow 1$, $\ln x_+ = \ln m + o(1)$, donc $x_+ = m + a \ln m + o(1)$, ce qui implique l'énoncé demandé.

Bilan personnel

Compétence	Acquis	À reprendre
Calcul exact et transformations algébriques	☐	☐
Choix d'une méthode	☐	☐
Usage correct des théorèmes	☐	☐
Rédaction d'une preuve	☐	☐
Contrôle de cohérence	☐	☐
Autonomie sur un problème long	☐	☐

Sources d'inspiration pédagogique

Repères utilisés pour concevoir la collection : programmes officiels de Première, Terminale spécialité et Mathématiques expertes ; programmes et commentaires de Terminale C du début des années 1970 ; cahiers et devoirs de Terminale C 1974-1975 ; annales du baccalauréat C 1974-1975. Les énoncés et corrigés de cette collection sont des créations originales.

Fin du cahier. Refaire les exercices marqués « Prépa » ou « Défi » une semaine plus tard.