

CAHIER 2

Fonctions, trigonométrie et suites

Comprendre les structures avant de calculer

*Cahiers de vacances — passage en L1
Niveau très exigeant, esprit prépa et ancienne série C*



Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

Objectif : autonomie, rigueur, culture mathématique et préparation aux raisonnements universitaires.

Présentation du cahier

Cette collection prépare un étudiant entrant en L1 scientifique, économique ou de gestion quantitative. Elle reprend les grands contenus de Première, Terminale spécialité et Mathématiques expertes, mais avec une exigence de démonstration, de calcul et d'autonomie inspirée de l'ancienne série C. Les exercices sont originaux et progressent de la consolidation vers des problèmes de niveau prépa.

Objectifs

- Maîtriser composition, bijection, réciproque, parité et périodicité.
- Réactiver une trigonométrie de calcul et de démonstration.
- Étudier des suites par transformations, invariants et changements de variable.
- Relier fonctions, géométrie analytique et problèmes d'optimisation.



Méthode de travail

1. Travailler sans calculatrice pendant la première tentative.
2. Rédiger les quantificateurs, les hypothèses et les conclusions.
3. Chercher au moins vingt minutes avant de lire une piste.
4. Reprendre l'exercice deux jours plus tard sans regarder la correction.
5. Tenir un carnet des erreurs : calcul, logique, méthode, rédaction.

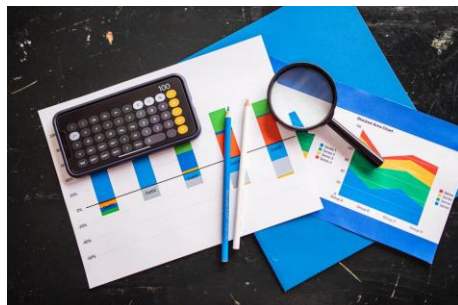
Barème conseillé

Niveau	Temps indicatif	Attendu
Consolidation	10 à 20 min	Calcul exact et rédaction propre
Approfondissement	20 à 35 min	Choix de méthode et justification
Prépa	35 à 60 min	Démonstration structurée
Défi / très exigeant	60 à 90 min	Autonomie et synthèse

Conseil : masquer les corrigés pendant la première semaine de travail.

I. Fonctions et transformations

Exercice 1. Domaines, images et compositions [Consolidation]



Éléments du cours : Domaine de définition ; composition de fonctions ; image d'un intervalle ; variations d'un trinôme.

Indication / méthode : Écrire les conditions de définition avant toute simplification. Pour une composition, une valeur x doit appartenir au domaine de la fonction intérieure et son image au domaine de la fonction extérieure.

Formules / outils utiles : $D(f \circ g) = \{x \in Dg : g(x) \in Df\}$; pour $h(x) = ax^2 + bx + c$, sommet d'abscisse $-b/(2a)$.

On pose $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $g(x) = 1/(x-2)$ et $h(x) = x^2 - 3x$.

1) Déterminer les domaines de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$.

2) Résoudre $f(g(x)) = 1$.

3) Déterminer l'image de $[1, 4]$ par h .

Piste (à lire seulement après recherche) : Écrire toutes les conditions de définition avant de simplifier.

Espace de travail :

Exercice 2. Fonction réciproque [Approfondissement]

Éléments du cours : Bijection sur un intervalle ; monotonie ; fonction réciproque ; résolution d'une équation du second degré ; comportement asymptotique.

Indication / méthode : Montrer d'abord la stricte monotonie sur l'intervalle choisi. Pour inverser la fonction, poser $y = f(x)$, résoudre en x et sélectionner la branche compatible avec $x \geq 1$.

Formules / outils utiles : $y = x + 1/x \Leftrightarrow x^2 - yx + 1 = 0$; $\Delta = y^2 - 4$.

Soit $f(x) = x + 1/x$ sur $[1, +\infty)$.

1) Montrer que f est strictement croissante et déterminer son image.

2) Déterminer explicitement f^{-1} .

3) Montrer que $f^{-1}(y) + 1/f^{-1}(y) = y$.

4) Étudier le comportement de $f^{-1}(y) - y$ lorsque $y \rightarrow +\infty$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Résoudre $x^2 - yx + 1 = 0$ en tenant compte de $x \geq 1$.

Espace de travail :

Exercice 3. Parité, périodicité, symétries [Prépa]

Éléments du cours : Fonctions paires et impaires ; périodicité ; transformations trigonométriques ; symétries de courbes.

Indication / méthode : Calculer $f(-x)$ et $f(x+T)$ avant d'interpréter géométriquement. Les expressions trigonométriques se simplifient souvent avec les formules somme-produit.

Formules / outils utiles : f paire $\Leftrightarrow f(-x)=f(x)$; f impaire $\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$; $\cos a + \cos b = 2\cos((a+b)/2)\cos((a-b)/2)$.

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer la parité, une période éventuelle et les symétries du graphe :

a) $\cos x + \cos 3x$; b) $\sin x \cos 2x$; c) $\tan(x+\pi/4)$; d) $x/(1+x^2)$.

Puis simplifier a) et b) par formules de linéarisation.

Piste (à lire seulement après recherche) : Utiliser les formules somme-produit.

Espace de travail :

Exercice 4. Équation fonctionnelle additive [Défi]

Éléments du cours : Équations fonctionnelles ; additivité ; rationnels ; continuité ; densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Indication / méthode : Établir successivement les propriétés pour 0, les opposés, les entiers puis les rationnels. La continuité permet ensuite de passer d'une suite rationnelle convergeant vers x au réel x .

Formules / outils utiles : $f(x+y)=f(x)+f(y)$; pour $q \in \mathbb{Q}$, $f(q)=qf(1)$; si $q_n \rightarrow x$ et f est continue, $f(q_n) \rightarrow f(x)$.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tous x, y .

1) Montrer $f(0)=0$, $f(-x)=-f(x)$ et $f(nx)=nf(x)$ pour n entier.

2) Montrer $f(q)=qf(1)$ pour q rationnel.

3) Si f est continue en 0, montrer $f(x)=ax$ sur $\mathbb{R}$.

4) Expliquer pourquoi la continuité est une hypothèse décisive.

Piste (à lire seulement après recherche) : Approcher un réel par des rationnels.

Espace de travail :

II. Trigonométrie exigeante**Exercice 5. Linéarisation [Consolidation]**

Éléments du cours : Identités trigonométriques ; angles doubles ; formules produit-somme ; puissances de sinus et cosinus.

Indication / méthode : Réduire progressivement les puissances paires avec les formules d'angle double ; pour les puissances impaires, isoler un facteur puis transformer le reste.

Formules / outils utiles : $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$; $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$; $\sin a \cos b = [\sin(a+b) + \sin(a-b)]/2$.

Exprimer comme combinaison de cosinus ou sinus d'angles multiples :

a) $\cos^4 x$; b) $\sin^3 x$; c) $\sin^2 x \cos^2 x$; d) $\cos^5 x$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Partir de $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$ et des formules produit-somme.

Espace de travail :

Exercice 6. Équations trigonométriques [Approfondissement]

Éléments du cours : Équations trigonométriques ; périodicité ; factorisation ; valeurs interdites de la tangente.

Indication / méthode : Ramener chaque équation à une expression factorisée ou à une équation simple en $\sin x$ ou $\cos x$. Revenir ensuite à l'intervalle $[0, 2\pi[$ et contrôler les valeurs interdites.

Formules / outils utiles : $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$; $\sin A = \sin B \Leftrightarrow A = B + 2k\pi$ ou $A = \pi - B + 2k\pi$.

Résoudre sur $[0, 2\pi[$:

a) $\cos 2x = \sin x$; b) $\sin 3x = \sin x$; c) $2\cos^2 x - 3\sin x = 0$; d) $\tan x + \tan 2x = 0$.

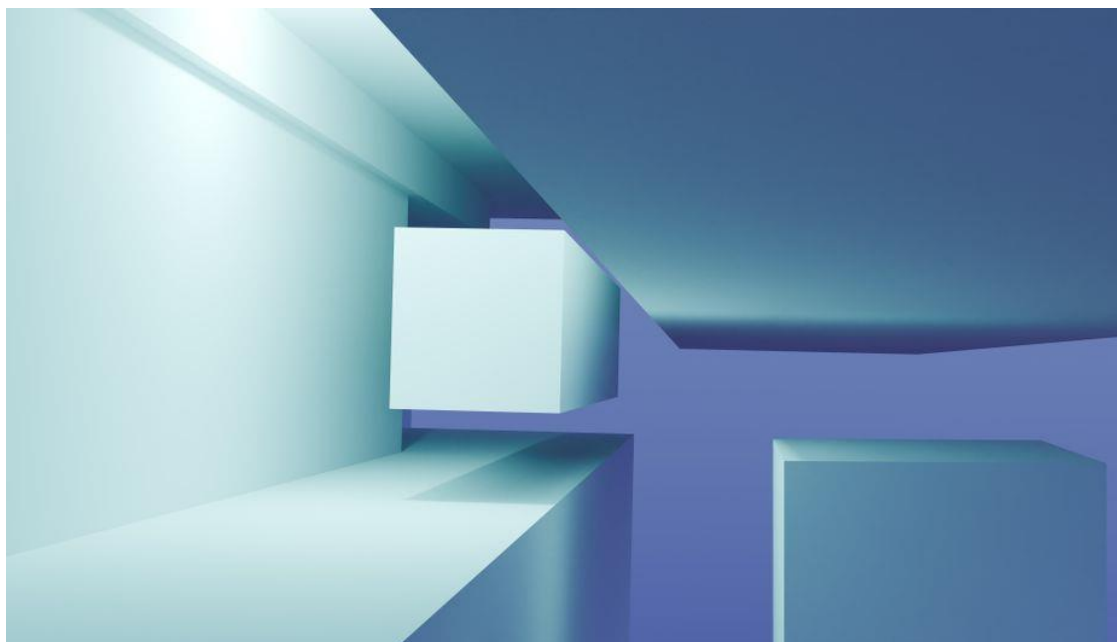


Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

Piste (à lire seulement après recherche) : Ramener chaque équation à un produit nul et contrôler les valeurs interdites.

Espace de travail :

Exercice 7. Substitution $t = \tan(x/2)$ [Prépa]

Éléments du cours : Substitution de Weierstrass ; trigonométrie rationnelle ; équations du second degré.

Indication / méthode : Exprimer $\sin x$ et $\cos x$ uniquement en fonction de t puis transformer l'équation trigonométrique en équation rationnelle. Vérifier à la fin les points exclus par la substitution.

Formules / outils utiles : $t = \tan(x/2)$; $\sin x = 2t/(1+t^2)$; $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$.

1) Établir les formules $\sin x = 2t/(1+t^2)$ et $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$, avec $t = \tan(x/2)$.

2) Résoudre sur $]-\pi, \pi[$ l'équation $3\sin x + 4\cos x = 1$.

3) Discuter les avantages et les limites de cette substitution.

Piste (à lire seulement après recherche) : Pour 2), obtenir une équation du second degré en t .

Espace de travail :

Exercice 8. Polynômes de Tchebychev [Défi]

Éléments du cours : Polynômes définis par récurrence ; trigonométrie ; récurrence sur le degré ; racines d'un polynôme.

Indication / méthode : Travailler d'abord sur $x = \cos \theta$ puis traduire les identités trigonométriques en identités polynomiales. La relation de récurrence contrôle simultanément le degré et le coefficient dominant.

Formules / outils utiles : $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$; $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

Définir T_n par $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

1) Calculer T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 .

2) Montrer $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

3) Montrer que T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} pour $n \geq 1$.

4) Résoudre $T_n(x) = 0$ sur $[-1, 1]$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Utiliser $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos \theta \cos(n\theta)$.

Espace de travail :

III. Suites et dynamiques discrètes

Exercice 9. Suite arithmético-géométrique [Consolidation]

Éléments du cours : Suites arithmético-géométriques ; point fixe ; changement de variable ; convergence géométrique.

Indication / méthode : Chercher le point fixe ℓ de la transformation affine puis poser $v_n = u_n - \ell$. La nouvelle suite devient géométrique, ce qui donne explicitement u_n et l'erreur à la limite.

Formules / outils utiles : $\ell = a\ell + b$; si $u_{n+1} = au_n + b$, alors $u_n - \ell = a^n(u_0 - \ell)$.

$u_{n+1} = 3u_n/4 + 2$, u_0 réel.

1) Déterminer le point fixe ℓ .

2) Poser $v_n = u_n - \ell$ et exprimer u_n .

3) Étudier monotonie et convergence selon u_0 .

4) Déterminer le premier rang n tel que $|u_n - \ell| < 10^{-6}$ lorsque $u_0 = 0$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Le point fixe vérifie $\ell = 3\ell/4 + 2$.

Espace de travail :

Exercice 10. Transformation homographique [Approfondissement]

Éléments du cours : Suites homographiques ; intervalle invariant ; points fixes ; changement de variable fractionnaire.

Indication / méthode : Repérer les points fixes de la transformation puis choisir une variable v_n construite avec leurs écarts. Vérifier directement que le quotient obtenu est multiplié par une constante.

Formules / outils utiles : Pour deux points fixes α, β , une substitution de type $v_n = (u_n - \alpha)/(u_n - \beta)$ peut transformer la récurrence en suite géométrique.

$u_0 > 1$ et $u_{n+1} = (3u_n + 1)/(u_n + 3)$.

1) Montrer $u_n > 1$.

2) Poser $v_n = (u_n - 1)/(u_n + 1)$. Montrer que (v_n) est géométrique.

3) En déduire u_n et sa limite.

Piste (à lire seulement après recherche) : Calculer directement v_{n+1} .

Espace de travail :

Exercice 11. Une suite implicite [Prépa]

Éléments du cours : Fonction monotone ; théorème des valeurs intermédiaires ; encadrement ; équivalents ; notation $o(1)$.

Indication / méthode : Étudier $\phi(x)=x+\ln x$ sur $]0, +\infty[$ pour l'existence et l'unicité, puis injecter dans l'équation des bornes simples de $\ln x$ afin d'encadrer x_n .

Formules / outils utiles : $\ln(1+t) \sim t$ lorsque $t \rightarrow 0$; $x_n/n \rightarrow 1$ signifie $x_n = n(1+o(1))$.

Pour $n \geq 1$, soit x_n l'unique solution positive de $x + \ln x = n$.

- 1) Justifier existence et unicité.
- 2) Montrer $n - \ln n \leq x_n \leq n$.
- 3) Montrer $x_n/n \rightarrow 1$.
- 4) Obtenir $x_n = n - \ln n + o(1)$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Étudier la fonction $x \mapsto x + \ln x$, puis réinjecter les premiers encadrements.

Espace de travail :

Exercice 12. Sommes trigonométriques [Défi]

Éléments du cours : Exponentielle complexe ; somme géométrique ; parties réelle et imaginaire ; linéarisation de $\cos^2$.

Indication / méthode : Regrouper les deux sommes dans $\sum e^{ik\theta}$, calculer cette somme géométrique puis prendre partie réelle et partie imaginaire.

Formules / outils utiles : $\sum_{k=0}^n z^k = (1 - z^{n+1}) / (1 - z)$, $z \neq 1$; $\cos^2 x = (1 + \cos 2x) / 2$.

Pour θ non multiple de 2π , calculer

$S_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $T_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

En déduire $\sum_{k=1}^n \cos^2(k\theta)$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Utiliser la somme géométrique de $e^{ik\theta}$.

Espace de travail :

IV. Géométrie analytique et optimisation

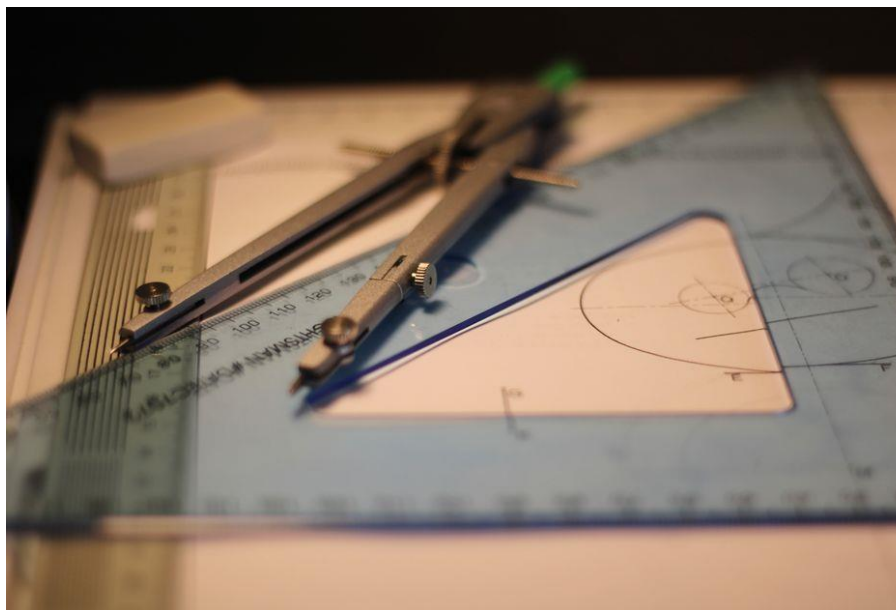


Figure géométrique pédagogique illustrant la notion

Exercice 13. Cercle et tangentes [Consolidation]

Éléments du cours : Équation cartésienne d'un cercle ; complétion du carré ; distance d'un point à une droite ; tangence.

Indication / méthode : Mettre d'abord l'équation du cercle sous forme canonique. Une droite parallèle à la droite donnée a la même normale ; imposer que sa distance au centre soit égale au rayon.

Formules / outils utiles : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$; $d((x_0, y_0), Ax+By+C=0) = |Ax_0 + By_0 + C| / \sqrt{A^2 + B^2}$.

Dans un repère orthonormé, C a pour équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

- 1) Déterminer son centre et son rayon.
- 2) Trouver les tangentes à C parallèles à la droite $3x - 4y + 1 = 0$.
- 3) Déterminer les points de contact.

Piste (à lire seulement après recherche) : Mettre l'équation sous forme canonique puis imposer que la distance du centre à la droite vaille le rayon.

Espace de travail :

Exercice 14. Parabole et tangente [Approfondissement]

Éléments du cours : Dérivée et tangente ; parabole ; tangentes issues d'un point ; équation du second degré ; aire d'un triangle.

Indication / méthode : Écrire la tangente au point d'abscisse a à l'aide de la dérivée, puis imposer qu'elle passe par le point extérieur. L'équation obtenue porte sur a.

Formules / outils utiles : Tangente à $y=f(x)$ en a : $y=f(a)+f'(a)(x-a)$.

On considère la parabole $y=x^2$.

- 1) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse a.
- 2) Montrer que les tangentes issues du point M(0,-1) touchent la parabole en deux points à déterminer.
- 3) Calculer l'aire du triangle formé par M et ces deux points de contact.

Piste (à lire seulement après recherche) : La tangente en a a pour équation $y=2ax-a^2$.

Espace de travail :

Exercice 15. Ellipse et paramétrisation [Prépa]

Éléments du cours : Ellipse ; paramétrisation trigonométrique ; tangente ; intersections avec les axes ; optimisation.

Indication / méthode : Utiliser $x=a \cos t$, $y=b \sin t$. Écrire la tangente à partir du point M(t), calculer ses intersections avec les axes puis exprimer l'aire en fonction de t.

Formules / outils utiles : Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; tangente en (x_0, y_0) : $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 = 1$.

On considère l'ellipse E : $x^2/9 + y^2/4 = 1$.

- 1) Vérifier que $M(t)=(3\cos t, 2\sin t)$ parcourt E.
- 2) Déterminer la tangente en M(t).
- 3) Déterminer la valeur minimale de l'aire du triangle formé par les intersections de cette tangente avec les axes et l'origine.

Piste (à lire seulement après recherche) : Utiliser le gradient ou une différentiation implicite.

Espace de travail :

Exercice 16. Optimisation géométrique [Défi]

Éléments du cours : Modélisation géométrique ; fonction aire ; dérivation ; recherche d'extremum sous contrainte.

Indication / méthode : Exprimer toutes les dimensions à l'aide d'une seule variable x et déterminer son domaine. Étudier ensuite l'aire ; pour la contrainte de périmètre, ajouter l'inégalité avant d'optimiser.

Formules / outils utiles : À l'intérieur d'un intervalle, un extremum différentiable vérifie généralement $A'(x)=0$; vérifier aussi les bornes du domaine.

Un rectangle est inscrit sous la parabole $y=4-x^2$, au-dessus de l'axe des abscisses, avec côtés parallèles aux axes.

- 1) Exprimer son aire en fonction de l'abscisse $x>0$ du sommet supérieur droit.
- 2) Déterminer l'aire maximale.
- 3) Refaire la question en imposant un périmètre maximal égal à 8.

Piste (à lire seulement après recherche) : La largeur vaut $2x$ et la hauteur $4-x^2$.

Espace de travail :

.....

Problèmes de synthèse



Problème A — Tchebychev, extrémum et oscillation

Éléments du cours : Polynômes de Tchebychev ; alternance des extrema ; coefficient dominant ; approximation uniforme.

Indication / méthode : Repérer les points $\theta = k\pi/n$ pour lesquels $\cos(n\theta) = \pm 1$. L'alternance de signes fournit ensuite un argument de comparaison avec tout autre polynôme unitaire de même degré.

Formules / outils utiles : $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$; coefficient dominant de T_n : 2^{n-1} pour $n \geq 1$.

Niveau : Prépa renforcée

On reprend les polynômes T_n .

- 1) Montrer $|T_n(x)| \leq 1$ pour $x \in [-1, 1]$.
- 2) Déterminer les $n+1$ points où T_n prend alternativement les valeurs ± 1 .
- 3) Soit P un polynôme unitaire de degré n . Montrer qu'il existe $x \in [-1, 1]$ tel que $|P(x)| \geq 2^{1-n}$.
- 4) Identifier le polynôme unitaire qui atteint cette borne.
- 5) Expliquer l'intérêt de ce résultat pour l'approximation polynomiale.

Piste globale : Comparer P au polynôme $2^{1-n}T_n$ et utiliser les changements de signe.

.....

.....

.....

Problème B — Itération d'une fonction



Représentation graphique de la fonction étudiée

Éléments du cours : Systèmes dynamiques discrets ; point fixe ; monotonie ; fonctions hyperboliques ; vitesse de convergence.

Indication / méthode : Étudier $f(x)-x$ sur $]0,1[$ puis reconnaître l'identité de duplication de $\tanh$. Le changement $u_n=\tanh(v_n)$ transforme l'itération non linéaire en relation simple sur v_n .

Formules / outils utiles : $\tanh(2v)=2\tanh(v)/(1+\tanh^2(v))$; $1-\tanh v \sim 2e^{-2v}$ lorsque $v \rightarrow +\infty$.

Niveau : Très exigeant

Soit $f(x)=2x/(1+x^2)$ sur $[0,1]$. On définit $u_{n+1}=f(u_n)$, avec $u_0 \in]0,1[$.

- 1) Montrer que $u_n \in]0,1[$ et que la suite est croissante.
- 2) Déterminer sa limite.
- 3) Poser $u_n=\tanh(v_n)$ et utiliser l'identité $\tanh(2v)=2\tanh(v)/(1+\tanh^2(v))$.
- 4) En déduire une formule explicite pour u_n .
- 5) Étudier la vitesse de convergence de $1-u_n$.

Piste globale : Le changement de variable transforme l'itération en doublement.

.....

.....

.....

Corrigés et éléments de solution

Les corrigés privilégient les idées, les étapes décisives et les contrôles. Une rédaction personnelle complète reste indispensable.

Exercice 1. Domaines, images et compositions

$$D_f = [1/2, +\infty), D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

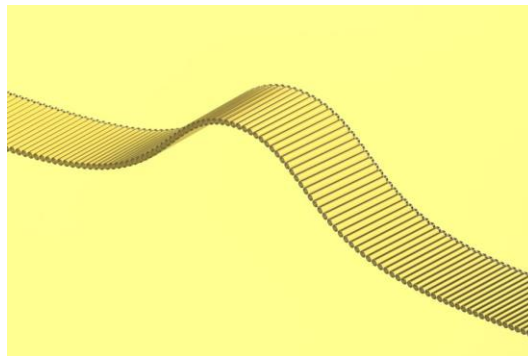
$f \circ g$ exige $x \neq 2$ et $2/(x-2) - 1 \geq 0$, soit $(4-x)/(x-2) \geq 0$, donc $]2, 4]$.

$g \circ f$ exige $x \geq 1/2$ et $\sqrt{2x-1} \neq 2$, donc $[1/2, +\infty) \setminus \{5/2\}$.

$f \circ h$ exige $2(x^2-3x)-1 \geq 0$, soit $2x^2-6x-1 \geq 0 : x \leq (3-\sqrt{11})/2$ ou $x \geq (3+\sqrt{11})/2$.

$f(g(x))=1$ donne $g(x)=1$, donc $x=3$.

h a son minimum en $3/2 : -9/4$; aux extrémités $h(1)=-2$, $h(4)=4$. Image $[-9/4, 4]$.



Exercice 2. Fonction réciproque

$f(x) = 1 - 1/x^2 \geq 0$, strictement positive pour $x > 1$. L'image est $[2, +\infty)$. Pour $y \geq 2$, les racines sont $(y \pm \sqrt{y^2-4})/2$; la racine ≥ 1 est $f^{-1}(y) = (y + \sqrt{y^2-4})/2$. L'identité est celle de l'équation initiale. Enfin $\sqrt{y^2-4} = y\sqrt{1-4/y^2} = y-2/y + o(1/y)$, donc $f^{-1}(y) - y = -1/y + o(1/y)$.

Exercice 3. Parité, périodicité, symétries

a) paire, période 2π ; $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cos x$.

b) impaire, période 2π ; $\sin x \cos 2x = [\sin 3x - \sin x]/2$.

c) période π , ni paire ni impaire par rapport à 0; son graphe est celui de $\tan$ translaté.

d) impaire, non périodique; symétrie centrale en l'origine.

Exercice 4. Équation fonctionnelle additive

1) Résultats obtenus directement par substitution puis récurrence.

2) Pour $q=p/r$, $r f(q) = f(rq) = f(p) = pf(1)$.

3) Si $q_n \rightarrow x$, alors $f(x) - f(q_n) = f(x - q_n) \rightarrow 0$, donc $f(x) = \lim q_n f(1) = xf(1)$.

4) Sans régularité, il existe des fonctions additives non linéaires construites à partir d'une base de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$; elles ne sont pas continues.

Exercice 5. Linéarisation

a) $\cos^4 x = (3 + 4\cos 2x + \cos 4x)/8$.

b) $\sin^3 x = (3\sin x - \sin 3x)/4$.

c) $\sin^2 x \cos^2 x = (1 - \cos 4x)/8$.

d) $\cos^5 x = (10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x)/16$.

Exercice 6. Équations trigonométriques

a) $1 - 2\sin^2 x = \sin x$, donc $2s^2 + s - 1 = 0 : s = 1/2$ ou -1 . Solutions $\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$.

b) $2\cos 2x \sin x = 0 : x = 0, \pi$ ou $x = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$.

c) $2(1-s^2)-3s=0$, soit $2s^2+3s-2=0 : s=1/2$. Solutions $\pi/6, 5\pi/6$.

d) $\tan 2x = -\tan x$, donc $2x \equiv -x \pmod{\pi}$, soit $x = k\pi/3$, en excluant x où $\tan x$ ou $\tan 2x$ n'existent. Sur $[0, 2\pi[: 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$.

Exercice 7. Substitution $t = \tan(x/2)$

1) Elles découlent des formules d'angle double.

2) $6t + 4(1-t^2) = 1 + t^2$, donc $5t^2 - 6t - 3 = 0$. Ainsi $t = (3 \pm 2\sqrt{6})/5$, puis $x = 2\arctan t$.

3) Elle rationalise toute expression en $\sin$ et $\cos$, mais le point $x = \pi$ modulo 2π correspond à t infini et doit être traité à part.

Exercice 8. Polynômes de Tchebychev

$T_0=1, T_1=x, T_2=2x^2-1, T_3=4x^3-3x, T_4=8x^4-8x^2+1$. La récurrence vient de la formule trigonométrique. Le degré et le coefficient dominant se démontrent par récurrence. Les zéros sont $\cos((2k+1)\pi/(2n))$, $k=0, \dots, n-1$.

Exercice 9. Suite arithmético-géométrique

$\ell=8$. $v_{n+1}=3v_n/4$, donc $u_n=8+(u_0-8)(3/4)^n$. La suite converge vers 8; elle croît si $u_0 < 8$, décroît si $u_0 > 8$. Pour $u_0=0 : 8(3/4)^n < 10^{-6}$, soit $n > \ln(1.25 \times 10^{-7})/\ln(3/4)$, donc $n=56$ convient et est minimal après vérification.

Exercice 10. Transformation homographique

L'intervalle $]1, +\infty[$ est stable. On obtient $v_{n+1}=v_n/2$, donc $v_n=v_0/2^n$. Comme $u_n=(1+v_n)/(1-v_n)$, $u_n \rightarrow 1$.

Exercice 11. Une suite implicite

La fonction est continue, strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ sur $]0, +\infty[$. Comme $\ln x_n \geq 0$ pour n assez grand, $x_n \leq n$. Et $x_n = n - \ln x_n \geq n - \ln n$. L'encadrement donne $x_n/n \rightarrow 1$. Alors $\ln x_n = \ln n + \ln(x_n/n) = \ln n + o(1)$, d'où $x_n = n - \ln n + o(1)$.

Exercice 12. Sommes trigonométriques

$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{in\theta/2} \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$. En prenant parties réelle et imaginaire :

$$S_n = \sin((n+1)\theta/2) \cos(n\theta/2) / \sin(\theta/2),$$

$$T_n = \sin((n+1)\theta/2) \sin(n\theta/2) / \sin(\theta/2).$$

Puis $\cos^2(k\theta) = [1 + \cos(2k\theta)]/2$ et on applique la formule à 2θ .

Exercice 13. Cercle et tangentes

$C : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$, centre $(2, -1)$, rayon 3. Les droites parallèles sont $3x - 4y + c = 0$. La distance du centre vaut $|10 + c|/5 = 3$, donc $c = 5$ ou $c = -25$. Les points de contact sont les projections orthogonales du centre : pour $c = 5$, $(-?)$ calcul : valeur $3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) + 5 = 15$, projection = $(2, -1) - 15/25(3, -4) = (1/5, 7/5)$. Pour $c = -25$, valeur -15, projection = $(19/5, -17/5)$.

Exercice 14. Parabole et tangente

M appartient à la tangente si $-1 = -a^2$, donc $a = \pm 1$. Les points de contact sont $A(1, 1)$ et $B(-1, 1)$. Le triangle MAB a pour base $AB = 2$ et pour hauteur 2, donc son aire vaut 2.

Exercice 15. Ellipse et paramétrisation

La tangente est $x \cos t/3 + y \sin t/2 = 1$. Ses intersections sont $A(3/\cos t, 0)$ et $B(0, 2/\sin t)$, donc l'aire vaut $3/|\sin t \cos t| = 6/|\sin 2t|$. Elle est donc au moins égale à 6, avec égalité lorsque $|\sin 2t| = 1$, c'est-à-dire $t = \pi/4 + k\pi/2$.

Exercice 16. Optimisation géométrique

$A(x) = 2x(4 - x^2)$, $0 \leq x \leq 2$. $A'(x) = 8 - 6x^2$, maximum pour $x = 2/\sqrt{3}$. Aire maximale $32/(3\sqrt{3})$. Avec contrainte de périmètre $2(2x + 4 - x^2) \leq 8$, soit $4x - 2x^2 \leq 0$, donc $x \in \{0\} \cup [2, +\infty)$ sur $[0, 2]$, ce qui ne laisse que $x = 2$ et aire nulle : la contrainte est trop sévère. La formulation met en évidence la nécessité de vérifier la faisabilité ; pour une borne de périmètre 10, l'optimisation devient non triviale.

Corrigés des problèmes



Représentation graphique de la fonction étudiée

Problème A — Tchebychev, extrémum et oscillation

- 1) $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.
- 2) $x_k = \cos(k\pi/n)$, $k=0, \dots, n$, avec valeurs $(-1)^k$.
- 3) Supposons $|P(x)| < 2^{1-n}$ partout. Alors $Q = P - 2^{1-n}T_n$ change de signe entre chaque x_k , donc possède au moins n racines, alors que son degré est au plus $n-1$ car les termes dominants s'annulent : contradiction.
- 4) $2^{1-n}T_n$.
- 5) Il minimise la norme uniforme parmi les polynômes unitaires de degré n , phénomène central en approximation.

Problème B — Itération d'une fonction

- 1) Pour $0 < x < 1$, $0 < f(x) < 1$ et $f(x) - x = x(1-x^2)/(1+x^2) > 0$.
- 2) La limite ℓ vérifie $\ell = 2\ell/(1+\ell^2)$, donc $\ell=0$ ou 1 ; la croissance impose 1 .
- 3) Si $u_0 = \tanh v_0$, alors $u_n = \tanh(2^n v_0)$.
- 4) Formule précédente avec $v_0 = \operatorname{artanh}(u_0) = 0,5 \ln((1+u_0)/(1-u_0))$.
- 5) $1 - \tanh t \sim 2e^{-2t}$, donc $1 - u_n \sim 2\exp(-2^{n+1}v_0)$: convergence doublement exponentielle.

Bilan personnel

Compétence	Acquis	À reprendre
Calcul exact et transformations algébriques	☐	☐
Choix d'une méthode	☐	☐
Usage correct des théorèmes	☐	☐
Rédaction d'une preuve	☐	☐
Contrôle de cohérence	☐	☐
Autonomie sur un problème long	☐	☐

Sources d'inspiration pédagogique

Repères utilisés pour concevoir la collection : programmes officiels de Première, Terminale spécialité et Mathématiques expertes ; programmes et commentaires de Terminale C du début des années 1970 ; cahiers et devoirs de Terminale C 1974-1975 ; annales du baccalauréat C 1974-1975. Les énoncés et corrigés de cette collection sont des créations originales.

Fin du cahier. Refaire les exercices marqués « Prépa » ou « Défi » une semaine plus tard.