

CAHIER 1

Fondations, logique et algèbre

Raisonner proprement, calculer vite, démontrer sans raccourci

*Cahiers de vacances — passage en L1
Niveau très exigeant, esprit prépa et ancienne série C*



Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

Objectif : autonomie, rigueur, culture mathématique et préparation aux raisonnements universitaires.

Présentation du cahier

Cette collection prépare un étudiant entrant en L1 scientifique, économique ou de gestion quantitative. Elle reprend les grands contenus de Première, Terminale spécialité et Mathématiques expertes, mais avec une exigence de démonstration, de calcul et d'autonomie inspirée de l'ancienne série C. Les exercices sont originaux et progressent de la consolidation vers des problèmes de niveau prépa.

Objectifs

- Maîtriser les quantificateurs, les implications et les raisonnements classiques.
- Retrouver une grande aisance en calcul algébrique et en factorisation.
- Travailler les polynômes, les récurrences et les identités combinatoires.
- Passer d'un exercice technique à un problème structuré de niveau prépa.

Méthode de travail

1. Travailler sans calculatrice pendant la première tentative.
2. Rédiger les quantificateurs, les hypothèses et les conclusions.
3. Chercher au moins vingt minutes avant de lire une piste.
4. Reprendre l'exercice deux jours plus tard sans regarder la correction.
5. Tenir un carnet des erreurs : calcul, logique, méthode, rédaction.

Barème conseillé

Niveau	Temps indicatif	Attendu
Consolidation	10 à 20 min	Calcul exact et rédaction propre
Approfondissement	20 à 35 min	Choix de méthode et justification
Prépa	35 à 60 min	Démonstration structurée
Défi / très exigeant	60 à 90 min	Autonomie et synthèse

Conseil : masquer les corrigés pendant la première semaine de travail.

I. Logique, ensembles et applications

Exercice 1. Quantificateurs et négations [Consolidation]

Éléments du cours : Logique propositionnelle ; quantificateurs $\forall$ et $\exists$; négation d'une proposition quantifiée ; propriété d'Archimède.

Indication / méthode : Traiter les quantificateurs de l'extérieur vers l'intérieur. Pour nier une inégalité, penser à inverser strictement ou largement le symbole selon le cas.

Formules / outils utiles : $\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \text{ tel que } \neg P(x)$; $\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$.

Pour chacune des propositions suivantes, écrire la négation sans utiliser les mots « il est faux que ». Puis dire si la proposition initiale est vraie.

- Pour tout réel x , il existe un entier n tel que $n > x$.
- Il existe un réel a tel que, pour tout réel x , $x^2 \geq a$.
- Pour tout entier $n \geq 2$, il existe un nombre premier p divisant n .
- Il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $1/n < 10^{-6}$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Traiter séparément les quantificateurs et inverser les inégalités.

Espace de travail :

Exercice 2. Implication, contraposée, réciproque [Approfondissement]

Éléments du cours : Implication, réciproque, contraposée ; équivalence ; divisibilité ; parité des entiers.

Indication / méthode : Pour une implication portant sur la parité, la contraposée est souvent plus directe. Tester les réciproques par des exemples simples avant de chercher une preuve.

Formules / outils utiles : $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$; $n \text{ pair} \Leftrightarrow n = 2k$; $n \text{ impair} \Leftrightarrow n = 2k + 1$.

On considère les propositions portant sur un entier n :

P : « n^2 est pair » ; Q : « n est pair » ; R : « n est divisible par 4 ».

- Démontrer $P \Rightarrow Q$ par contraposée.
- Étudier $Q \Rightarrow P$, $P \Rightarrow R$ et $R \Rightarrow P$.
- Construire une proposition S , strictement plus forte que P mais strictement plus faible que R .

Piste (à lire seulement après recherche) : Pour la contraposée, partir de n impair. Pour la troisième question, chercher une condition de divisibilité intermédiaire.

Espace de travail :

Exercice 3. Images directes et réciproques [Prépa]

Éléments du cours : Applications ; image directe et image réciproque d'un ensemble ; inclusion ; injectivité.

Indication / méthode : Raisonner élément par élément : partir de « y appartient à... » ou « x appartient à... » et traduire chaque appartenance par une existence ou une condition sur $f(x)$.

Formules / outils utiles : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Soit $f : E \rightarrow F$ et A, B deux parties de E ; C, D deux parties de F .

- Démontrer $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- Montrer que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
- Démontrer $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
- Montrer que f est injective si et seulement si, pour toutes parties A et B de E , $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Raisonner élément par élément. Pour l'exemple, choisir une fonction non injective.

Espace de travail :

Exercice 4. Principe des tiroirs [Défi]

Éléments du cours : Principe des tiroirs ; congruences ; décomposition d'un entier ; raisonnement géométrique par partition.

Indication / méthode : Identifier les « tiroirs » avant de compter les objets. Pour la divisibilité, regrouper les entiers selon leur partie impaire ; pour la géométrie, découper la figure en régions simples.

Formules / outils utiles : Si N objets sont répartis dans p tiroirs avec $N > p$, au moins un tiroir contient au moins deux objets ; tout entier $n \geq 1$ s'écrit $n = 2^k m$ avec m impair.

- 1) Montrer que parmi six entiers, deux ont le même reste modulo 5.
- 2) Montrer que parmi $n+1$ entiers choisis dans $\{1, 2, \dots, 2n\}$, deux sont tels que l'un divise l'autre.
- 3) Montrer que, parmi cinq points placés dans un carré de côté 2, deux sont à une distance au plus $\sqrt{2}$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Pour 2), écrire chaque entier sous la forme $2^k m$ avec m impair. Pour 3), découper le carré.

Espace de travail :

II. Calcul algébrique et inégalités

Exercice 5. Identités de factorisation [Consolidation]

Éléments du cours : Calcul algébrique ; identités remarquables ; factorisation de polynômes ; sommes et différences de puissances.

Indication / méthode : Chercher d'abord une identité standard, puis éventuellement ajouter/retrancher un terme pour faire apparaître un carré ou un produit connu.

Formules / outils utiles : $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$; $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

Factoriser complètement sur $\mathbb{R}$:

a) $x^4 + 4$; b) $x^6 - 1$; c) $x^4 - 5x^2 + 4$; d) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Pour a), ajouter et retrancher $4x^2$. Pour d), chercher un facteur $a+b+c$.

Espace de travail :

Exercice 6. Équations avec valeurs absolues [Approfondissement]



Éléments du cours : Valeur absolue comme distance ; étude par intervalles ; équations et inéquations ; changement de signe.

Indication / méthode : Repérer tous les zéros des expressions placées sous valeur absolue, découper la droite réelle, puis résoudre sur chaque intervalle en vérifiant les conditions obtenues.

Formules / outils utiles : $|u| = u$ si $u \geq 0$ et $|u| = -u$ si $u < 0$; $|u| \leq |v| \Leftrightarrow u^2 \leq v^2$.

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

a) $|x-1|+|2x+3|=7$.

b) $|x^2-4|=3x$.

c) $|x-2| \leq |2x+1|$.

Présenter les solutions sous forme d'intervalles ou d'ensembles finis.

Piste (à lire seulement après recherche) : Découper la droite aux points où les expressions changent de signe.

Espace de travail :

Exercice 7. Trois inégalités fondamentales [Prépa]

Éléments du cours : Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Titu Andreescu ; moyenne arithmético-géométrique ; manipulations sur nombres positifs.

Indication / méthode : Chercher à transformer chaque terme afin de faire apparaître une somme de carrés ou une forme $\sum a_i^2/b_i$. Exploiter fortement l'hypothèse de positivité.

Formules / outils utiles : $(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$; $\sum a_i^2/b_i \geq (\sum a_i)^2/(\sum b_i)$; $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$.

Soient $a, b, c > 0$.

1) Démontrer $(a+b+c)(1/a+1/b+1/c) \geq 9$.

2) Démontrer $a/(b+c)+b/(c+a)+c/(a+b) \geq 3/2$.

3) Si $abc=1$, montrer $a^2+b^2+c^2 \geq a+b+c$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Utiliser Cauchy-Schwarz pour 1 et 2. Pour 3, exploiter $uv \leq (u^2+v^2)/2$ ou AM-GM.

Espace de travail :

Exercice 8. Paramètre et signe [Défi]

Éléments du cours : Trinôme du second degré avec paramètre ; discriminant ; signe ; relations de Viète ; cas dégénéré.

Indication / méthode : Commencer par isoler la valeur du paramètre qui annule le coefficient de x^2 . Pour les autres valeurs, utiliser successivement Δ puis somme et produit des racines.

Formules / outils utiles : $\Delta = b^2 - 4ac$; $x_1 + x_2 = -b/a$; $x_1 x_2 = c/a$.

Pour m réel, étudier le nombre de solutions réelles de l'équation

$$(m-1)x^2 - 2mx + (m+1) = 0.$$

Puis déterminer les valeurs de m pour lesquelles les deux racines, lorsqu'elles existent, sont strictement positives.

Piste (à lire seulement après recherche) : Traiter séparément $m=1$, puis utiliser discriminant, somme et produit des racines.

Espace de travail :

III. Polynômes

Exercice 9. Division euclidienne et congruence [Consolidation]

Éléments du cours : Division euclidienne des polynômes ; congruences modulo un polynôme ; calcul de restes.

Indication / méthode : Réduire les puissances en utilisant la relation imposée par le diviseur, plutôt que d'effectuer une division longue complète.

Formules / outils utiles : $P = DQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(D)$; modulo $X^2 - 1$: $X^2 \equiv 1$; modulo $X^2 + 1$: $X^2 \equiv -1$.

Soit $P(X) = X^7 + 2X^5 - X^3 + 4X - 6$.

1) Déterminer le reste de la division de P par $X^2 - 1$.

2) Déterminer le reste de la division de P par $X^2 + 1$.

3) En déduire $P(1)$, $P(-1)$, $P(i)$ et $P(-i)$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Travailler modulo $X^2 - 1$ puis modulo $X^2 + 1$.

Espace de travail :

Exercice 10. Racine multiple et paramètre [Approfondissement]

Éléments du cours : Polynômes ; multiplicité d'une racine ; dérivée d'un polynôme ; factorisation.

Indication / méthode : Une racine double doit annuler simultanément le polynôme et sa dérivée. Cela fournit un système sur les paramètres avant la factorisation finale.

Formules / outils utiles : α racine double de $P \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$.

Déterminer les réels a et b pour lesquels le polynôme

$$P(X) = X^4 - 4X^3 + aX^2 + bX + 1$$

admet 1 comme racine double. Factoriser alors P et étudier ses racines réelles.

Piste (à lire seulement après recherche) : Utiliser $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$.

Espace de travail :

Exercice 11. Polynôme réciproque [Prépa]

Éléments du cours : Polynômes réciproques ; symétrie des coefficients ; changement de variable $x + 1/x$; équation quadratique.

Indication / méthode : Vérifier d'abord que $x = 0$ est impossible, diviser par la puissance centrale, puis regrouper les termes symétriques $x^k + x^{-k}$.

Formules / outils utiles : Si $t = x + 1/x$, alors $x^2 + 1/x^2 = t^2 - 2$; x est ensuite solution de $x^2 - tx + 1 = 0$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1 = 0.$$

On interdira la résolution générale du quatrième degré.

Piste (à lire seulement après recherche) : Le polynôme est réciproque. Diviser par x^2 et poser $t = x + 1/x$.

Espace de travail :

Exercice 12. Interpolation et différence finie [Défi]

Éléments du cours : Interpolation polynomiale ; degré d'un polynôme ; différences finies ; suites polynomiales.

Indication / méthode : Construire une table de différences successives. Une différence d'ordre supérieur au degré devient nulle, ce qui permet aussi de prolonger la suite de valeurs.

Formules / outils utiles : $\Delta P(k) = P(k+1) - P(k)$; si $\deg(P) \leq 3$, alors $\Delta^4 P = 0$.

Un polynôme P de degré au plus 3 vérifie $P(0)=1$, $P(1)=2$, $P(2)=5$ et $P(3)=10$.

- 1) Déterminer P .
- 2) Sans recalcul complet, déterminer $P(4)$.
- 3) Généraliser : que peut-on dire de la quatrième différence finie d'un polynôme de degré au plus 3 ?

Piste (à lire seulement après recherche) : Construire une table de différences finies.

Espace de travail :

IV. Suites et combinatoire

Exercice 13. Récurrence linéaire [Consolidation]

Éléments du cours : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ; équation caractéristique ; sommes de suites géométriques.

Indication / méthode : Résoudre l'équation caractéristique, écrire la forme générale de u_n , puis déterminer les constantes avec u_0 et u_1 . Pour la somme, utiliser la formule géométrique terme à terme.

Formules / outils utiles : Pour $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$: $r^2 - ar - b = 0$; $\sum_{k=0}^n q^k = (1 - q^{n+1}) / (1 - q)$ si $q \neq 1$.

La suite (u_n) est définie par $u_0=2$, $u_1=3$ et $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$.

- 1) Conjecturer une formule explicite.
- 2) La démontrer.
- 3) Calculer $\sum_{k=0}^n u_k$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Résoudre l'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$.

Espace de travail :

Exercice 14. Suite définie par une racine [Approfondissement]

Éléments du cours : Suites récurrentes ; intervalle stable ; monotonie ; point fixe ; trigonométrie et formules d'angle moitié.

Indication / méthode : Montrer d'abord que l'intervalle $[0,2]$ est stable. Comparer u_{n+1} et u_n , puis résoudre l'équation du point fixe. Pour la formule explicite, chercher une écriture $2 \cos \theta$.

Formules / outils utiles : $1 + \cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2)$; une limite ℓ vérifie $\ell = \sqrt{2 + \ell}$.

Soit $u_0 \in [0,2]$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

- 1) Montrer que la suite reste dans $[0,2]$.
- 2) Étudier sa monotonie selon u_0 .
- 3) Déterminer sa limite.
- 4) Pour $u_0=0$, montrer que $u_n = 2 \cos(\pi/2^{n+1})$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Comparer u_{n+1} et u_n en étudiant $2 + x - x^2$. Pour la formule, utiliser $1 + \cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2)$.

Espace de travail :

Exercice 15. Sommes télescopiques [Prépa]

Éléments du cours : Sommes finies ; décomposition en éléments simples ; télescopage ; séries géométriques dérivées.

Indication / méthode : Décomposer le terme général en différence de termes consécutifs. Pour une somme comportant kq^k , comparer la somme avec sa version multipliée et décalée.

Formules / outils utiles : $1/[k(k+1)] = 1/k - 1/(k+1)$; $\sum_{k=0}^n q^k = (1-q^{n+1})/(1-q)$.

Pour $n \geq 1$, calculer exactement :

- a) $\sum_{k=1}^n 1/[k(k+1)]$;
- b) $\sum_{k=1}^n 1/[k(k+1)(k+2)]$;
- c) $\sum_{k=1}^n k/2^k$.

En déduire les limites lorsque $n \rightarrow \infty$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Décomposer en éléments simples. Pour c), soustraire deux fois la somme décalée.

Espace de travail :

Exercice 16. Identités binomiales [Défi]

Éléments du cours : Binôme de Newton ; coefficients binomiaux ; dérivation d'une identité polynomiale ; double comptage.

Indication / méthode : Faire deux lectures : une preuve algébrique à partir de $(1+x)^n$ et de ses dérivées, puis une preuve combinatoire en comptant le même ensemble de deux façons.

Formules / outils utiles : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C(n,k)x^k$; $d/dx[(1+x)^n] = n(1+x)^{n-1}$.

Pour $n \geq 1$, démontrer de deux façons :

- 1) $\sum_{k=0}^n C(n,k) = 2^n$.
- 2) $\sum_{k=0}^n kC(n,k) = n2^{n-1}$.
- 3) $\sum_{k=0}^n k(k-1)C(n,k) = n(n-1)2^{n-2}$.
- 4) En déduire $\sum k^2 C(n,k)$.

Piste (à lire seulement après recherche) : Une preuve algébrique utilise $(1+x)^n$ et ses dérivées ; une preuve combinatoire compte des couples.

Espace de travail :



Problèmes de synthèse

Problème A — Fibonacci, matrices et arithmétique

Éléments du cours : Suite de Fibonacci ; récurrence ; identité de Cassini ; divisibilité ; pgcd ; matrice compagne.

Indication / méthode : Conserver les identités déjà obtenues pour les réutiliser dans les questions suivantes. Les propriétés arithmétiques se déduisent souvent d'une identité de déterminant ou d'addition des indices.

Formules / outils utiles : $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$; matrice compagne $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; équation caractéristique $r^2-r-1=0$.

Niveau : Prépa renforcée

On définit $F_0=0$, $F_1=1$ et $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.

- 1) Calculer F_2 à F_{10} .
- 2) Montrer par récurrence que $F_0+\dots+F_n=F_{n+2}-1$.
- 3) Montrer que $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$ pour $n\geq 1$.
- 4) En déduire que deux termes consécutifs sont premiers entre eux.
- 5) Prouver que $F_{n+p}=F_{p-1}F_n+F_pF_{n+1}$.
- 6) Montrer que si d divise n , alors F_d divise F_n .
- 7) Culture : expliquer pourquoi cette suite constitue un premier pont entre récurrence, matrices, nombres d'or et arithmétique.

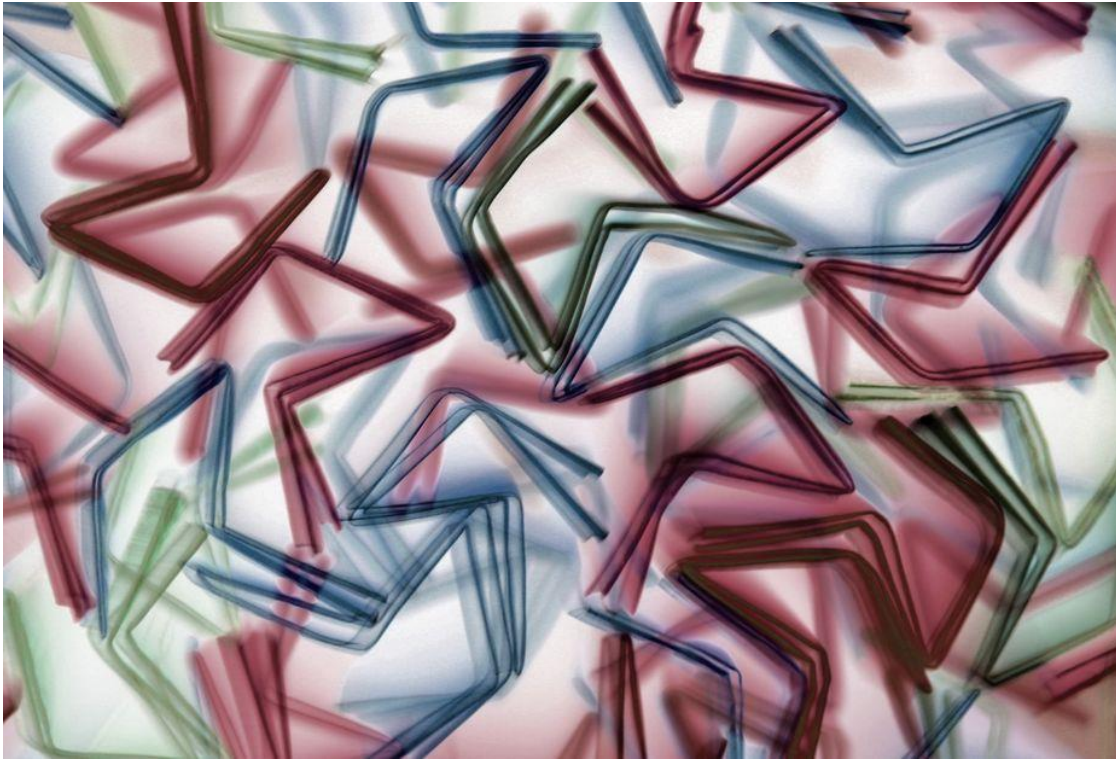
Piste globale : Pour 3), observer que l'expression change de signe. Pour 5), fixer p et raisonner sur n .

.....

.....

.....

Problème B — Une inégalité polynomiale complète



Représentation graphique de la fonction étudiée

Éléments du cours : Binôme de Newton ; positivité des coefficients ; étude de fonction ; inégalités ; préparation au nombre e .

Indication / méthode : Développer P_n sans chercher à tout simplifier : la positivité des termes contrôle immédiatement plusieurs questions. Pour le meilleur coefficient, étudier le quotient $P_n(x)/x^2$.

Formules / outils utiles : $(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)x^2/2 + \dots$; $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^n$.

Niveau : Très exigeant

Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on pose $P_n(x) = (1+x)^n - 1 - nx$.

- 1) Montrer $P_n(x) \geq 0$.
- 2) Pour $n \geq 2$, déterminer le plus grand réel c_n tel que $P_n(x) \geq c_n x^2$ pour tout $x \in [0, 1]$.
- 3) Étudier la fonction $x \mapsto P_n(x)/x^2$ sur $]0, 1]$.
- 4) Montrer que, pour $x \geq 0$, $(1+x)^n \geq 1 + nx + n(n-1)x^2/2$.
- 5) Dédire un encadrement de $(1+1/n)^n$ utile pour préparer l'étude du nombre e .

Piste globale : Développer par le binôme et observer que tous les coefficients sont positifs.

.....

Corrigés et éléments de solution

Les corrigés privilégient les idées, les étapes décisives et les contrôles. Une rédaction personnelle complète reste indispensable.

Exercice 1. Quantificateurs et négations

- a) Négation : il existe x réel tel que pour tout entier n , $n \leq x$. La proposition est vraie par propriété d'Archimède.
- b) Négation : pour tout réel a , il existe x tel que $x^2 < a$. La proposition initiale est vraie, par exemple avec $a = 0$.
- c) Négation : il existe $n \geq 2$ sans diviseur premier. La proposition est vraie : tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.
- d) Négation : pour tout entier N , il existe $n \geq N$ tel que $1/n \geq 10^{-6}$. La proposition initiale est vraie, par exemple $N = 1\,000\,001$.

Exercice 2. Implication, contraposée, réciproque

- 1) Si n est impair, $n = 2k+1$, donc $n^2 = 4k(k+1)+1$ est impair. Ainsi n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.
- 2) $Q \Rightarrow P$ est vraie. $P \Rightarrow R$ est fausse : $n=2$ vérifie P mais pas R . $R \Rightarrow P$ est vraie.
- 3) On peut prendre S : « n est divisible par 2 ». Ici S est équivalente à P , donc pas strictement plus forte. Une condition strictement intermédiaire n'existe pas parmi les seules divisibilités de n entre 2 et 4. En revanche, S : « n est pair et $n \neq 2$ » est plus forte que P et plus faible que R n'est pas vraie pour $n=6$. La question révèle qu'un ordre logique doit être vérifié sur l'ensemble des entiers ; une réponse correcte est S : « n est divisible par 2 et n n'est pas congru à 2 modulo 8 ». Alors $R \Rightarrow S \Rightarrow P$, et les deux implications sont strictes.

Exercice 3. Images directes et réciproques

- 1) $y \in f(A \cup B)$ équivaut à l'existence de $x \in A \cup B$ avec $f(x)=y$, donc $x \in A$ ou $x \in B$, d'où $y \in f(A) \cup f(B)$. La réciproque est identique.
- 2) Si $y=f(x)$ avec $x \in A \cap B$, alors $y \in f(A) \cap f(B)$. Inclusion stricte : $f(x)=x^2$, $A=\{-1\}$, $B=\{1\}$.
- 3) $x \in f^{-1}(C \cap D) \Leftrightarrow f(x) \in C \cap D \Leftrightarrow f(x) \in C$ et $f(x) \in D$.
- 4) Si f est injective et $y \in f(A) \cap f(B)$, $y=f(a)=f(b)$, donc $a=b \in A \cap B$. Réciproquement, appliquer l'égalité à $A=\{x\}$, $B=\{y\}$; si $f(x)=f(y)$, l'intersection des images est non vide, donc $A \cap B$ non vide et $x=y$.

Exercice 4. Principe des tiroirs

- 1) Il n'existe que cinq classes de congruence modulo 5.
- 2) Chaque entier s'écrit de manière unique $2^k m$ avec m impair. Il n'y a que n nombres impairs possibles entre 1 et $2n$. Deux entiers ont donc le même m : $2^a m$ et $2^b m$; le plus petit divise le plus grand.
- 3) Découper le carré en quatre carrés unité. Deux des cinq points appartiennent au même petit carré, dont la diagonale vaut $\sqrt{2}$.

Exercice 5. Identités de factorisation

- a) $x^4+4=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.
- b) $x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.
- c) $(x^2-1)(x^2-4)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$.
- d) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

Exercice 6. Équations avec valeurs absolues

- a) Les points critiques sont $-3/2$ et 1 . On obtient $x=-3$ et $x=5/3$.
- b) Le membre droit impose $x \geq 0$. Si $x^2 \geq 4$: $x^2-4=3x$, donc $x=4$. Si $x^2 < 4$: $4-x^2=3x$, donc $x=1$. Solutions $\{1,4\}$.
- c) En élevant au carré : $(x-2)^2 \leq (2x+1)^2$, soit $3x^2+8x-3 \geq 0$. Les racines sont -3 et $1/3$. Solution $(-\infty, -3] \cup [1/3, +\infty)$.

Exercice 7. Trois inégalités fondamentales

- 1) Par Cauchy, $(\sum a)(\sum 1/a) \geq (1+1+1)^2=9$.
- 2) Par Titu Andreescu, $\sum a/(b+c) = \sum a^2/[a(b+c)] \geq (a+b+c)^2/[2(ab+bc+ca)] \geq 3/2$ car $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$.
- 3) Par Cauchy, $a^2+b^2+c^2 \geq (a+b+c)^2/3$. Or $abc=1$ implique $a+b+c \geq 3$ par AM-GM, donc $(a+b+c)^2/3 \geq a+b+c$.

Exercice 8. Paramètre et signe

Pour $m \neq 1$, $\Delta = 4m^2 - 4(m^2 - 1) = 4$, donc deux racines distinctes : $x_1 = 1$ et $x_2 = (m+1)/(m-1)$. Pour $m=1$, l'équation $-2x+2=0$ donne $x=1$. Il y a donc toujours au moins une solution, et deux solutions distinctes sauf $m=1$ et $m?$ lorsque $x_2=1$, impossible car $m+1=m-1$. Les deux racines sont positives si $(m+1)/(m-1) > 0$, soit $m < -1$ ou $m > 1$.

Exercice 9. Division euclidienne et congruence

- 1) Modulo X^2-1 , $X^{2k}=1$ et $X^{2k+1}=X$. Donc $P \equiv X+2X-X+4X-6=6X-6$.
- 2) Modulo X^2+1 , $X^3=-X$, $X^5=X$, $X^7=-X$. Donc $P \equiv -X+2X+X+4X-6=6X-6$.
- 3) $P(1)=0$, $P(-1)=-12$, $P(i)=6i-6$, $P(-i)=-6i-6$.

Exercice 10. Racine multiple et paramètre

$P(1)=a+b-2=0$ et $P'(1)=4-12+2a+b=0$, donc $2a+b=8$. D'où $a=6$ et $b=-4$. Alors $P=(X-1)^2(X^2-2X+1)=(X-1)^4$. L'unique racine réelle est 1, de multiplicité 4.

Exercice 11. Polynôme réciproque

$x \neq 0$. Après division par x^2 : $(x^2+x^{-2})-6(x+x^{-1})+10=0$. Or $x^2+x^{-2}=t^2-2$. Donc $t^2-6t+8=0$, soit $t=2$ ou $t=4$.
 $t=2$ donne $x=1$. $t=4$ donne $x^2-4x+1=0$, donc $x=2 \pm \sqrt{3}$. Solutions : 1 (double), $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$.

Exercice 12. Interpolation et différence finie

Valeurs : 1,2,5,10. Premières différences : 1,3,5. Deuxièmes : 2,2. Troisième : 0. Donc P est quadratique : $P(x)=x^2+1$. Ainsi $P(4)=17$. Pour tout polynôme de degré ≤ 3 , la quatrième différence finie est nulle.

Exercice 13. Récurrence linéaire

Les racines sont 1 et 2, donc $u_n=A+B2^n$. Les conditions donnent $A+B=2$ et $A+2B=3$, donc $A=B=1$. Ainsi $u_n=1+2^n$. La somme vaut $(n+1)+(2^{n+1}-1)=2^{n+1}+n$.

Exercice 14. Suite définie par une racine

- 1) Si $0 \leq u_n \leq 2$, alors $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$, donc l'intervalle est stable.
- 2) $u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow 2+u_n \geq u_n^2 \Leftrightarrow (2-u_n)(u_n+1) \geq 0$. La suite est croissante sauf si $u_0=2$, cas constant.
- 3) Toute limite ℓ vérifie $\ell=\sqrt{2+\ell}$, donc $\ell=2$ ou -1 ; seule 2 convient.
- 4) Vérification par récurrence à l'aide de $\sqrt{2+2\cos \theta}=2\cos(\theta/2)$ pour $\theta \in [0, \pi]$.



Image decorative en lien avec le theme general du cahier (mathematiques, etude), sans rapport avec un exercice precis

Exercice 15. Sommes télescopiques

- a) $1-1/(n+1)$, limite 1.
- b) $1/[k(k+1)(k+2)]=1/2[1/(k(k+1))-1/((k+1)(k+2))]$, donc somme $=1/4-1/[2(n+1)(n+2)]$, limite $1/4$.
- c) $S_n=2-(n+2)/2^n$, limite 2.

Exercice 16. Identités binomiales

Les trois premières identités s'obtiennent en évaluant en $x=1$ le binôme et ses deux premières dérivées. Comme $k^2=k(k-1)+k$, la dernière somme vaut $n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2}$.

Corrigés des problèmes

Problème A — Fibonacci, matrices et arithmétique

- 1) 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55.
- 2) Hérité immédiat en ajoutant F_{n+1} .
- 3) Poser $D_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$. On vérifie $D_{n+1} = -D_n$ et $D_1 = -1$.
- 4) Tout diviseur commun de F_n et F_{n+1} divise $D_n = \pm 1$.
- 5) L'identité est vraie pour $n=0$ et $n=1$, puis se propage par la relation de Fibonacci.
- 6) Utiliser l'identité précédente et une récurrence sur le quotient n/d , ou la formule matricielle.
- 7) La relation linéaire se code par une matrice 2×2 ; ses valeurs propres font apparaître le nombre d'or ; les identités de divisibilité relient la suite à l'arithmétique.

Problème B — Une inégalité polynomiale complète

- 1) $P_n(x) = \sum_{k=2}^n C(n,k)x^k \geq 0$.
- 2) Sur $[0,1]$, $P_n(x)/x^2 = \sum_{k=2}^n C(n,k)x^{k-2}$, fonction croissante. Son infimum est la limite en 0, soit $C(n,2)$. Donc $c_n = n(n-1)/2$.
- 3) La dérivée est $\sum_{k=3}^n (k-2)C(n,k)x^{k-3} \geq 0$.
- 4) On conserve les trois premiers termes du binôme.
- 5) Avec $x=1/n$, on obtient $(1+1/n)^n \geq 1 + 1 + (n-1)/(2n) = 5/2 - 1/(2n)$. Un encadrement supérieur plus fin viendra dans le cahier d'analyse ; ici l'objectif est d'identifier le rôle des développements positifs.



Bilan personnel

Compétence	Acquis	À reprendre
Calcul exact et transformations algébriques	☐	☐
Choix d'une méthode	☐	☐
Usage correct des théorèmes	☐	☐
Rédaction d'une preuve	☐	☐
Contrôle de cohérence	☐	☐
Autonomie sur un problème long	☐	☐

Sources d'inspiration pédagogique

Repères utilisés pour concevoir la collection : programmes officiels de Première, Terminale spécialité et Mathématiques expertes ; programmes et commentaires de Terminale C du début des années 1970 ; cahiers et devoirs de Terminale C 1974-1975 ; annales du baccalauréat C 1974-1975. Les énoncés et corrigés de cette collection sont des créations originales.

Fin du cahier. Refaire les exercices marqués « Prépa » ou « Défi » une semaine plus tard.